1
Metody dowodzenia twierdzeń

Przez *zdanie* rozumiemy dowolne stwierdzenie, które jest albo prawdziwe, albo fałszywe (nie może być ono jednocześnie prawdziwe i fałszywe). Tradycyjnie będziemy używali małych liter $p, q, r, \ldots$ jako zmiennych zdaniowych, to znaczy, zmiennych reprezentujących dowolne zdania, oraz następujących spójników międzyzdaniowych: $\wedge$ (koniunkcja), $\vee$ (alternatywa), $\Rightarrow$ (implikacja), $\Leftrightarrow$ (równoważność), $\neg$ (negacja).

W pierwszym paragrafie tego rozdziału interesować nas będzie prawdziwość zdania $p \Rightarrow q$ (jeżeli p, to q). W tym przypadku mówimy, że p jest *warunkiem dostatecznym* dla q lub, że q jest *warunkiem koniecznym* dla p. Stwierdzenie, że p jest warunkiem koniecznym i dostatecznym dla q jest tym samym, co stwierdzenie prawdziwości równoważności $p \Leftrightarrow q$ (p wtedy i tylko wtedy, gdy q).

1.1. Metody dowodu implikacji

Przypomnijmy, iż implikacja $p \Rightarrow q$ jest fałszywa wtedy i tylko wtedy, gdy jej poprzednik p jest prawdziwy, a następnik q jest fałszywy; w pozostałych trzech przypadkach implikacja jest zdaniem prawdziwym.

Dowód wprost

Metoda dowodu wprost polega na założeniu, że p jest prawdą i pokazaniu, że wówczas q jest prawdą.

Przykład 1.1. *Udowodnić wprost, że jeżeli a jest taką liczbą całkowitą, że $a - 4$ jest podzielne przez 5, to $a^3 + 1$ jest podzielne przez 5.*

Przykład 1.2. *Udowodnić wprost, że jeżeli x jest taką liczbą rzeczywistą, że $x^2 - 3x - 10 = 0$, to $x = -2$ lub $x = 5$.*

Dowód nie wprost

Metoda dowodu nie wprost opiera się na następującej tautologii rachunku zdań, zwanej prawem kontrapozycji:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Zatem stosując tę metodę zakładamy, że q jest zdaniem fałszywym i pokazujemy, że p jest również zdaniem fałszywym.

Przykład 1.3. *Udowodnić nie wprost, że jeżeli iloczyn dwóch liczb całkowitych a i b jest liczbą parzystą, to a jest liczbą parzystą lub b jest liczbą parzystą.*

Przykład 1.4. *Udowodnić nie wprost, że jeżeli n jest iloczynem dwóch dodatnich liczb całkowitych a i b, to $a \leqslant \sqrt{n}$ lub $b \leqslant \sqrt{n}$.*

Dowód przez zaprzeczenie

Przypomnijmy inne znane prawo rachunku zdań

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q).$$

Stosując do jego prawej strony prawo De Morgana, otrzymujemy równoważność

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)\,,$$

na której opiera się metoda dowodu przez zaprzeczenie (zwanego także dowodem przez sprowadzenie do sprzeczności). Stosując to podejście zakładamy, że p jest prawdą a q fałszem i pokazujemy, że prowadzi to do sprzeczności, to znaczy, pokazujemy że $(p \wedge \neg q)$ jest fałszem.

Przykład 1.5. *Udowodnić przez zaprzeczenie, że spośród trzynastu ludzi dwóch lub więcej ma swoje urodziny w tym samym miesiącu.*

Przykład 1.6. *Udowodnić przez zaprzeczenie, że jeżeli wybrano 41 kul z szufladki zawierającej kule czerwone, białe, niebieskie, zielone i żółte (zakładamy, że w każdym kolorze jest więcej kul niż wybieramy), to co najmniej 12 kul jest czerwonych lub co najmniej 15 kul jest białych, lub co najmniej 4 kule są niebieskie, lub co najmniej 10 kul jest zielonych, lub co najmniej 4 kule są żółte. Podać dowód tego faktu przez zaprzeczenie.*

1.2. Zasada indukcji matematycznej

Niech $p(n)$ będzie zdaniem, które dla każdego naturalnego n może być zdaniem prawdziwym lub fałszywym. Aby udowodnić, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n, gdzie $n \geqslant n_0$, wystarczy pokazać, że

(a) *zdanie $p(n_0)$ jest prawdziwe,*

(b) *dla każdego $k \geqslant n_0$,*

$$p(k) \Rightarrow p(k+1), \tag{1.1}$$

tzn. zdanie $p(k+1)$ jest prawdziwe jeżeli tylko zdanie $p(k)$ jest prawdziwe.

Warunek (a) nazywa się *warunkiem początkowym*. Założenie, że $p(k)$ jest prawdziwe nazywa się *założeniem indukcyjnym*, a $p(k+1)$ *tezą indukcyjną*, zaś sama implikacja (1.1) *krokiem indukcyjnym*.

Przykład 1.7. *Znaleźć i udowodnić wzór na sumę pierwszych n liczb naturalnych.*

Przykład 1.8. *Znaleźć i udowodnić wzór na sumę sześcianów n pierwszych liczb naturalnych, tzn. na sumę*

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3.$$

Przykład 1.9. *Pokazać, że dla każdego naturalnego n, wyrażenie*

$$6^{n+2} + 7^{2n+1}$$

jest podzielne przez 43.

Przykład 1.10. *Pokazać, że dla każdego naturalnego $n \geqslant 4$,*

$$3^n > n^3.$$

Przykład 1.11. *Pokazać, że suma n pierwszych wyrazów ciągu arytmetycznego o pierwszym wyrazie a i o różnicy d, równa jest*

$$\frac{1}{2}n\left(2a + (n-1)d\right).$$

Zasadę indukcji matematycznej można sformułować na wiele równoważnych sposobów. Poniżej podamy inną, często wykorzystywaną wersję tej zasady, którą następnie użyjemy w Przykładzie 1.12.

> *Niech $p(n)$ będzie zdaniem, które dla każdego naturalnego n może być zdaniem prawdziwym lub fałszywym. Aby udowodnić, że zdanie $p(n)$ jest prawdziwe dla wszystkich liczb naturalnych n, gdzie $n \geqslant n_0$, wystarczy pokazać, że*
>
> (a) *zdanie $p(n_0)$ jest prawdziwe,*
>
> (b) *dla każdego $k \geqslant n_0$,*
>
> $$(p(n_0) \wedge p(n_0+1) \wedge \cdots \wedge p(k)) \Rightarrow p(k+1)$$
>
> *tzn. zdanie $p(k+1)$ jest prawdziwe jeżeli tylko wszystkie zdania $p(i)$ są prawdziwe dla $n_0 \leqslant i \leqslant k$.*

Przykład 1.12. *Pokazać, że jeżeli są spełnione warunki $a_0 = 12, a_1 = 29$ (nazywane początkowymi) oraz dla $n \geqslant 2$ zachodzi wzór*

$$a_n = 5a_{n-1} - 6a_{n-2}$$

(nazywany wzorem rekurencyjnym), to dla każdego naturalnego n

$$a_n = 5 \cdot 3^n + 7 \cdot 2^n.$$

1.3. Zasada szufladkowa

Zasada szufladkowa (znana też jako *zasada szufladkowa Dirichleta*) polega na prostej obserwacji, że jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladkach, gdzie $n > m$, to istnieje szufladka, która zawiera co najmniej dwa przedmioty. Ogólniej:

> *Jeżeli rozmieścimy n przedmiotów w m szufladkach, przy czym $n > k \cdot m$ ($k \in \mathbb{N}$), to w którejś szufladce znajdzie się co najmniej $k+1$ przedmiotów.*

Przykład 1.13. *Uzasadnić, że w każdym mieście liczącym co najmniej 1,7 miliona mieszkańców znajdziemy co najmniej pięć osób o tej samej liczbie włosów na głowie, jeżeli przyjmiemy, że rośnie ich na ludzkiej głowie co najwyżej 400 000.*

Przykład 1.14. *W turnieju piłkarskim, w którym docelowo każda drużyna ma zagrać z każdą inną bierze udział n zespołów. Uzasadnić, że w dowolnym momencie trwania turnieju znajdą się dwie drużyny, które rozegrały do tego momentu tę samą liczbę meczów.*

Przykład 1.15. *Pokazać, że jeżeli w trójkącie równobocznym o boku długości 4 umieścimy 17 punktów, to znajdziemy dwa punkty, między którymi odległość nie przekracza 1.*

Przykład 1.16. *Pokazać, że wśród $n+1$ dowolnych liczb całkowitych znajdą się dwie, których różnica dzieli się przez n.*

Przykład 1.17. *Każde dwa wierzchołki sześciokąta foremnego połączono odcinkiem zielonym lub czerwonym. Wykazać, że został narysowany co najmniej jeden trójkąt o bokach tego samego koloru.*

1.4. Zadania

Zadanie 1.1. Udowodnić wprost, że jeżeli a i b są nieparzystymi liczbami całkowitymi, to $a+b$ jest parzystą liczbą całkowitą.

Zadanie 1.2. Udowodnić nie wprost, że dla dowolnej liczby naturalnej n, jeżeli n^2 jest liczbą nieparzystą, to n też jest liczbą nieparzystą.

Zadanie 1.3. Niech n będzie taką liczbą naturalną, że $n > 1$ i n nie jest liczbą pierwszą. Udowodnić przez sprowadzenie do sprzeczności, że n posiada co najmniej jeden dzielnik pierwszy p taki, że $p \leq \sqrt{n}$.

Zadanie 1.4. Udowodnić, że dla każdego naturalnego n

(a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$,

(b) $1^3 + 3^3 + 5^3 + \ldots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$,

(c) $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \ldots + n \cdot (n+1) \cdot (n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$.

Zadanie 1.5. Udowodnij przez indukcję, że dla każdego $n \in \mathbb{N}$

$$1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \cdots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$$

Zadanie 1.6. Udowodnić, że dla każdego całkowitego $n \geqslant 0$ wyrażenie

$$11^{n+2} + 12^{2n+1}$$

jest podzielne przez 133.

Zadanie 1.7. Udowodnić, że suma n pierwszych wyrazów ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie a i o ilorazie q ($q \neq 1$) równa jest

$$\frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Zadanie 1.8. Udowodnić, że jeżeli $a_0 = 6, a_1 = 11$ oraz dla $n \geqslant 2$

$$a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2},$$

to dla każdego $n \geqslant 0$

$$a_n = 5 \cdot 2^n + 1.$$

Zadanie 1.9. Grupa 41 studentów zaliczyła sesję składającą się z trzech egzaminów, w których możliwymi ocenami były bdb, db i dst. Wykazać, że co najmniej pięcioro studentów zaliczyło sesję z jednakowym „zbiorem" ocen.

Zadanie 1.10. W każde pole szachownicy $n \times n$ wpisujemy jedną z liczb: $-1, 0, 1$. Następnie dodajemy do siebie liczby stojące w tym samym wierszu, w tej samej kolumnie i na tej samej przekątnej. Pokazać, że wśród otrzymanych sum co najmniej dwie są równe.

Zadanie 1.11. Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które sumują się do $2n+1$.

Zadanie 1.12. Pokazać, że dla dowolnych $n+1$ różnych dodatnich liczb całkowitych mniejszych bądź równych $2n$ istnieją dwie, które są względnie pierwsze.

Zadanie 1.13. Pokazać, że dla dowolnych n dodatnich liczb całkowitych istnieje podzbiór, którego suma liczb jest podzielna przez n.

Zadanie 1.14. Niech A będzie dwudziestoelementowym podzbiorem zbioru $\{1, 4, 7, 10, 13, \ldots, 100\}$. Udowodnij, że A zawiera dwie różne liczby, których suma jest równa 104.

Zadanie 1.15. Niech dla ustalonego n naturalnego A będzie podzbiorem mocy $n+1$ zbioru $[2n]$. Udowodnić, że A zawiera dwie różne liczby a i b, takie że a jest dzielnikiem b.