Edward Stachowski

O trzech elementarnych nierównościach i ich zastosowaniach przy dowodzeniu innych nierówności

Przy dowodzeniu nierówności stosujemy elementarne **przejścia równoważne**, przeprowadzamy rozumowanie typu:
jeżeli $a > 0$ oraz $b > 0$, to:
i) $a \geq b \ \Leftrightarrow \ a^2 \geq b^2$,
ii) $a \geq b \ \Leftrightarrow \ \sqrt{a} \geq \sqrt{b}$,
albo stosujemy **przejścia, które nie są równoważne.**
Korzystamy wtedy z relacji przechodniości:
jeżeli $a \geq b$ oraz $b \geq c$, to $a \geq c$,
albo
z możliwości dodawania stronami zgodnie skierowanych nierówności:
jeżeli $a \geq b$ oraz $c \geq d$, to $a + b \geq c + d$,
albo
z możliwości mnożenia stronami zgodnie skierowanych nierówności dla liczb dodatnich:
jeżeli $a \geq b \geq 0$ oraz $c \geq d \geq 0$, to $a \cdot c \geq b \cdot d$.
Zapowiadane w tytule trzy elementarne nierówności są następujące (z podanej numeracji będziemy korzystali w przedstawianych rozwiązaniach przykładowych zadań):

1. Dla każdych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$a^2 + b^2 \geq 2ab,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

2. Nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej.
Średnią geometryczną dwóch nieujemnych liczb rzeczywistych a, b nazywamy liczbę $\sqrt{ab}$.
Dla każdych nieujemnych liczb rzeczywistych a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

którą często zapisujemy w postaci

$$a + b \geq 2\sqrt{ab},$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.

3. Dla każdych liczb rzeczywistych a, b, takich, że $ab > 0$, prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2,$$

przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = b$.
Jeżeli $ab < 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy $a = -b$.

Nierówność 1

Zadania wprowadzające

Zadanie 1.
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2+1 \geq 2x$.

<u>Rozwiązanie</u>
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$x^2+1 \geq 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$
Ostatnia nierówność jest oczywista.
Równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$.

Zadanie 2.
Wykaż, że dla każdej liczby rzeczywistej x prawdziwa jest nierówność $x^2+1 \geq 2|x|$.
<u>Rozwiązanie</u>
Zauważamy, że $|x|^2 = x^2$ i przekształcamy nierówność równoważnie:
$x^2+1 \geq 2|x| \Leftrightarrow x^2-2|x|+1 \geq 0 \Leftrightarrow (|x|-1)^2 \geq 0$
Ostatnia nierówność jest oczywista.
Równość ma miejsce, gdy wtedy i tylko wtedy, gdy $|x|=1$, czyli dla $x=1$ albo $x=-1$.

***Nierówność* 1**
Dla każdych liczb rzeczywistych x oraz y prawdziwa jest nierówność
$$x^2+y^2 \geq 2xy.$$
<u>Dowód</u>
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$x^2+y^2 \geq 2xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$
Ostatnia nierówność jest oczywista.
Równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $x=y$.

<u>Przykłady zastosowań nierówności **1.**</u>

Przykład 1.
Wykaż, że dla każdych liczb rzeczywistych x oraz a prawdziwa jest nierówność
$(x+a)^2 \geq 4ax$.
<u>Rozwiązanie</u>
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$(x+a)^2 \geq 4ax \Leftrightarrow x^2+2ax+a^2 \geq 4ax \Leftrightarrow x^2-2ax+a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-a)^2 \geq 0$
Ostatnia nierówność jest oczywista.
Równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $x=a$.

Przykład 2.
Wykaż, że jeżeli a, b są długościami przyprostokątnych trójkąta prostokątnego oraz c jest długością przeciwprostokątnej tego trójkąta, to $a+b \leq c\sqrt{2}$.

Rozwiązanie

Jest wiele dowodów geometrycznych tej nierówności, my przedstawimy dowód algebraiczny, ale oczywiście nie obejdzie się bez zastosowania twierdzenia Pitagorasa. Pokażemy, że $(a+b)^2 \le 2c^2$, co jest równoważne z tezą.

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \overset{(1)}{\le} a^2 + \left(a^2 + b^2\right) + b^2 = 2\left(a^2 + b^2\right) = 2c^2$$

Równość ma miejsce, gdy trójkąt jest równoramienny (jest „połową kwadratu”).

Uwaga

Zauważmy, że „przy okazji” udowodniliśmy nierówność o związku między średnią arytmetyczną i średnią kwadratową.

Średnia kwadratowa liczb a,b jest równa $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

Wykazaliśmy, że dla dowolnych liczb a,b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b}{2} \le \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}},$$

i gdy $a \ge 0, b \ge 0$, to równość zachodzi, dla $a = b$.

Przykład 3.

Wykaż, że jeżeli w prostopadłościanie a,b,c są długościami krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka oraz d jest długością przekątnej tego prostopadłościanu, to $a+b+c \le d\sqrt{3}$.

Rozwiązanie

Jest wiele dowodów geometrycznych tej nierówności, my przedstawimy dowód algebraiczny, korzystając z wzoru na długość przekątnej prostopadłościanu: $a^2+b^2+c^2 = d^2$.

Pokażemy, że $(a+b+c)^2 \le 3d^2$, co jest równoważne z tezą.

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc \overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le} a^2+b^2+c^2+\left(a^2+b^2\right)+\left(a^2+c^2\right)+\left(b^2+c^2\right) =$$

$$= 3\left(a^2+b^2+c^2\right) = 3d^2$$

Równość ma miejsce, dla $a = b = c$, czyli gdy prostopadłościan jest sześcianem.

Uwaga

Średnia arytmetyczna liczb $x_1, x_2, ...x_n$, to $\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$,

średnia kwadratowa liczb $x_1, x_2, ...x_n$, to $\sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}$.

Rozumując tak, jak w przykładach 2 oraz 3, możemy udowodnić nierówność między średnia arytmetyczną i średnią kwadratową liczb $x_1, x_2, ...x_n$ tzn. wykazać , że dla dowolnych liczb $x_1, x_2, ...x_n$ prawdziwa jest nierówność

$$\frac{x_1+x_2+...+x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_n^2}{n}}.$$

Przykład 4.

Wykaż, że jeżeli $x+y=a$, to $x^2+y^2 \ge \frac{a^2}{2}$,

w szczególności, gdy $x+y=1$, to $x^2+y^2 \ge \frac{1}{2}$.

<u>Rozwiązanie</u>

Podnosimy obie strony równości $x+y=a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności (1).

$a^2=(x+y)^2=x^2+2xy+y^2 \overset{(1)}{\le} x^2+(x^2+y^2)+y^2=2(x^2+y^2)$, stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 2 otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=\frac{a}{2}$.

Przykład 5.

Wykaż, że jeżeli $x+y+z=a$, to $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{a^2}{3}$.

W szczególności $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \ge \frac{1}{3}$.

<u>Rozwiązanie</u>

Podnosimy obie strony równości $x+y+z=a$ do kwadratu i korzystamy z nierówności (1).

$$a^2=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz \overset{(1)}{\le}$$

$$\overset{(1)}{\le} x^2+y^2+z^2+(x^2+y^2)+(x^2+z^2)+(y^2+z^2)=3(x^2+y^2+z^2)$$

Stąd po podzieleniu obu stron nierówności przez 3 otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z=\frac{a}{3}$.

<u>Uwaga</u>

Rozumując analogicznie jak w przykładach 3 oraz 4 można wykazać, że jeżeli $x_1, x_2, ...x_n$ są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x_1+x_2+...+x_n=a$, to $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2 \ge \frac{a^2}{n}$.

Równość ma miejsce, gdy $x_1=x_2=...=x_n=\frac{a}{n}$.

Przykład 6.

Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych x, y, z prawdziwa jest nierówność

$x^2+y^2+z^2 \ge xy+xz+yz$.

Rozwiązanie
Zapisujemy trzy razy nierówność **1.**
$x^2+y^2\geq 2xy$,
$x^2+z^2\geq 2xz$,
$y^2+z^2\geq 2yz$,
po dodaniu stronami otrzymujemy $2\left(x^2+y^2+z^2\right)\geq 2\left(xy+xz+yz\right)$, a po podzieleniu obu stron przez 2 otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.
Uwaga
Rozumując analogicznie jak w przykładzie 6 możemy wykazać, że jeżeli $x_1,x_2,...x_n$ są liczbami rzeczywistymi, to

$$\left(n-1\right)\sum_{k=1}^{n}x_k^2\geq 2\cdot\sum_{1\leq i<j\leq n}x_i\cdot x_j ,$$

i równość ma miejsce , gdy $x_1=x_2=...=x_n$.

Nierówność 2

Zadanie wprowadzające
Zadanie 1.
Wykaż, że jeżeli $x\geq 0$, to $x+1\geq 2\sqrt{x}$.
Rozwiązanie
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$x+1\geq 2\sqrt{x}\Leftrightarrow x-2\sqrt{x}+1\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}\right)^2-2\sqrt{x}+1\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{x}-1\right)^2\geq 0$.
Ostatnia nierówność jest oczywista.
Równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $x=1$.

***Nierówność* 2**
Da każdych liczb nieujemnych rzeczywistych a,b prawdziwa jest nierówność dla średniej arytmetycznej i geometrycznej

$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, którą często zapisujemy w postaci $a+b\geq 2\sqrt{ab}$.

Równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$.

Dowód
Przekształcamy nierówność równoważnie:
$\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}\Leftrightarrow a+b\geq 2\sqrt{ab}\Leftrightarrow a-2\sqrt{ab}+b\geq 0\Leftrightarrow\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2\geq 0$.
Ostatnia nierówność i fakt, że równość ma miejsce, wtedy i tylko wtedy, gdy $a=b$ są oczywiste.

Uwaga
Nierówność ta zasługuje na szczególną uwagę.

Z faktu, że dla każdych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ wynika, że:

a) jeżeli stała jest suma dwóch liczb dodatnich, to ich iloczyn jest największy, gdy obie liczby są równe, (np. wśród prostokątów o ustalonym obwodzie największe pole ma kwadrat),
b) jeżeli stały jest iloczyn dwóch liczb dodatnich, to ich suma jest najmniejsza, gdy obie liczby są równe, (np. wśród prostokątów o ustalonym polu najmniejszy obwód ma kwadrat).

<u>Przykłady zastosowań nierówności **2.**</u>

Przykład 1.
Wykaż, że jeżeli $x > 0$, $y > 0$ oraz $xy = 25$, to $(1+x)(1+y) \geq 36$.

<u>Rozwiązanie</u>

$(1+x)(1+y) = 1 + xy + x + y = 26 + (x+y) \overset{(2)}{\geq} 26 + 2\sqrt{25} = 36$.

Równość ma miejsce, gdy $x = y = 5$.

Przykład 2.
Wykaż, że jeżeli a, b, x są liczbami dodatnimi oraz $ab = 4$, to $(a+x)(b+x) \geq (x+2)^2$.

<u>Rozwiązanie</u>

$(a+x)(b+x) = x^2 + ab + ax + bx = x^2 + 4 + (a+b)x \overset{(2)}{\geq} x^2 + 4 + 2\sqrt{4} \cdot x = x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2$.

Równość ma miejsce, gdy $a = b = 2$.

Przykład 3.
Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz = 1$, to

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8.$$

<u>Rozwiązanie</u>

Zapisujemy trzy razy nierówność dla średnich:

$1 + x \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{x}$,

$1 + y \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{y}$,

$1 + z \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{z}$.

Mnożą te trzy nierówności stronami otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x = y = z = 1$.

Przykład 4.
Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$(x+y)(x+z)(y+z) \geq 8xyz.$$

<u>Rozwiązanie</u>

Zapisujemy trzy razy nierówność dla średnich:

$x+y \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{xy}$,

$y+z \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{yz}$,

$x+z \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{xz}$.

Mnożąc te trzy nierówności stronami otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 5.
Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$xy+yz+zx \geq x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy} .$$

<u>Rozwiązanie</u>
Dla uproszczenia dowodu pomnożymy obie strony tezy przez 2,
przekształcimy lewą stronę otrzymanej nierówności i trzy razy zastosujemy nierówność (2).

$$2(xy+yz+zx)=xy+xz+yx+yz+zx+zy=x(y+z)+y(x+z)+z(x+y) \overset{(2)}{\geq}$$

$$\overset{(2)}{\geq} x\cdot 2\sqrt{yz}+y\cdot 2\sqrt{xz}+z\cdot 2\sqrt{xz}=2\left(x\sqrt{yz}+y\sqrt{zx}+z\sqrt{xy}\right).$$

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 6.
Wykaż, że jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi, to

$$\sqrt{(a+b)(c+d)} \geq 2\sqrt[4]{abcd} .$$

<u>Rozwiązanie</u>
Obie strony nierówności są dodatnie, więc po podniesieniu ich do kwadratu otrzymamy nierówność równoważną

$$(a+b)(c+d) \geq 4\sqrt{abcd} .$$

Zapisujemy teraz dwa razy nierówność (2)

$a+b \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{ab}$,

$c+d \overset{(2)}{\geq} 2\sqrt{cd}$.

Po pomnożeniu tych nierówności stronami otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $a=b$ oraz $c=d$.

Przykład 7.
Wykaż, że jeżeli x, y są liczbami dodatnimi oraz $x+y=16$, to

$$(1+x)(1+y) \leq 81.$$

<u>Rozwiązanie</u>
Korzystając z nierówności 2. mamy

$$xy=\left(\sqrt{xy}\right)^2 \leq \left(\frac{x+y}{2}\right)^2=64$$

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy

$$(1+x)(1+y)=1+x+y+xy \leq 1+16+64=81,$$

co należało wykazać.

Nierówność 3

Zadania wprowadzające.

Zadanie 1.

Wykaż, że jeżeli $x > 0$, to $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

<u>Rozwiązanie</u>

Ponieważ $x > 0$, to po pomnożeniu obu stron nierówności przez x, otrzymujemy nierówność $x^2 + 1 \geq 2x$, równoważną z oczywistą nierównością $(x-1)^2 \geq 0$.

Równość ma miejsce, gdy $x = 1$.

Zadanie 2.

Wykaż, że jeżeli $x < 0$, to $x + \frac{1}{x} \leq -2$.

<u>Rozwiązanie</u>

Ponieważ $x < 0$, to po pomnożeniu obu stron nierówności przez x, otrzymujemy nierówność $x^2 + 1 \geq -2x$, równoważną z oczywistą nierównością $(x+1)^2 \geq 0$.

Równość ma miejsce, gdy $x = -1$.

***Nierówność* 3**

a) Jeżeli $ab > 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$.
b) Jeżeli $ab < 0$, to $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \leq -2$.

<u>Dowód</u>

a) Ponieważ $ab > 0$, to mnożąc obie strony nierówności przez ab otrzymujemy nierówność $a^2 + b^2 \geq 2ab$, równoważną z oczywistą nierównością $(a-b)^2 \geq 0$.
   Równość ma miejsce, gdy $a = b$.
b) Ponieważ $ab < 0$, to mnożąc obie strony nierówności przez ab otrzymujemy Nierówność $a^2 + b^2 \geq -2ab$, równoważną z oczywistą nierównością $(a+b)^2 \geq 0$.
   Równość ma miejsce, gdy $a = -b$.

<u>Przykłady zastosowań nierówności **3.**</u>

Przykład 1.

Z nierówności 3a) wynika natychmiast, że jeżeli α jest kątem ostrym, to

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \geq 2,$$

przy czym równość ma miejsce wtedy i tylko gdy $\alpha = 45^\circ$.

Przykład 2.

Wykaż, że jeżeli $xy>0$, to $(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)\geq 4$.

<u>Rozwiązanie</u>

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$(x+y)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1=2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right).$$

Stosujemy teraz nierówność (3)

$$2+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)\overset{(3)}{\geq}2+2=4.$$

Równość ma miejsce, gdy $x=y$.

Przykład 3.

Wykaż, że jeżeli x,y,z są liczbami dodatnimi, to $(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geq 9$.

<u>Rozwiązanie</u>

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=1+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{x}+1+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+1=$$

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right).$$

Stosujemy teraz do każdego z trzech nawiasów nierówność (3)

$$3+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\overset{(3)}{\geq}3+2+2+2=9$$

i otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 4.

Wykaż, że jeżeli x,y,z są liczbami dodatnimi, to

$$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)\geq 0.$$

<u>Rozwiązanie</u>

Przekształcając lewą stronę nierówności otrzymujemy:

$$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)=$$

$$=xyz\left(\frac{x}{z}-\frac{y}{z}-2+\frac{y}{x}+\frac{z}{x}-2+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}-2\right)=$$

$$=xyz\left(\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}-2\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}-2\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}-2\right)\right)$$

Stosując do każdego z trzech nawiasów nierówność (3) w wersji

$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0$, otrzymujemy tezę.

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 5.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi, to

$$\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y} \geq x+y+z .$$

Rozwiązanie

Dla uproszczenia dowodu pomnożymy obie strony tezy przez 2,
przekształcimy lewą stronę otrzymanej nierówności i zastosujemy do każdego z trzech nawiasów nierówność (3).

$$2\left(\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}\right)=\frac{xy}{z}+\frac{xz}{y}+\frac{yz}{x}+\frac{xy}{z}+\frac{yz}{x}+\frac{xz}{y}=$$

$$=x\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+y\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)+z\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)\overset{(3)}{\geq} 2x+2y+2z=2(x+y+z)$$

Równość ma miejsce, gdy $x=y=z$.

Przykład 6.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz=1$, to

$$xy+xz+yz+x+y+z \geq 6 .$$

Rozwiązanie

Z warunku $xyz=1$ wyznaczymy $z=\frac{1}{xy}$ otrzymując: $xz=x\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{y}, yz=y\cdot\frac{1}{xy}=\frac{1}{x}$.

Zapisujemy nierówność w postaci $xy+\frac{1}{y}+\frac{1}{x}+x+y+\frac{1}{xy}=\left(x+\frac{1}{x}\right)+\left(y+\frac{1}{y}\right)+\left(xy+\frac{1}{xy}\right)$.

Stosując do każdego z nawiasów nierówność (3) otrzymujemy tezę.
Równość ma miejsce, gdy $x=y=z=1$.

Przykład 7.

Wykaż, że jeżeli x, y, z są liczbami dodatnimi oraz $xyz=1$, to

$$(1+x)(1+y)(1+z) \geq 8 .$$

Wskazówka

Wykonaj działania po lewej stronie nierówności i porównaj z poprzednim zadaniem.