KAPITAŁ LUDZKI
NARODOWA STRATEGIA SPÓJNOŚCI

Centralna
Komisja
Egzaminacyjna

UNIA EUROPEJSKA
EUROPEJSKI
FUNDUSZ SPOŁECZNY

Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.

„Zadania na dowodzenie"
Geometria cz. 1

Autor: Wojciech Guzicki

Materiały konferencyjne
Wrzesień 2010

Centralna Komisja Egzaminacyjna
Zespół ds. realizacji projektów
współfinansowanych z Europejskiego
Funduszu Społecznego

ul. Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa
tel./fax (022) 536-65-46
tel. (022) 536-65-31
www.cke-efs.pl

ZADANIA NA DOWODZENIE
GEOMETRIA, cz. I
Wojciech Guzicki

W arkuszach maturalnych matury próbnej (listopad 2009 r.) i matury podstawowej (maj 2010 r.) znalazły się zadania geometryczne na dowodzenie. Za poprawne rozwiązanie takiego zadania zdający mógł otrzymać 2 pkt. Zatem były to tzw. „zadania krótkiej odpowiedzi”. Przy wystawianiu oceny za rozwiązanie zadania na dowodzenie kierowano się zasadą, że dowód matematyczny powinien być kompletny i tylko w wyjątkowych sytuacjach można uznać, że zdający „pokonał zasadnicze trudności zadania”, nie doprowadzając przy tym rozwiązania do końca.

W tym opracowaniu pokazuję 21 zadań geometrycznych na dowodzenie o podobnym stopniu trudności jak zadania ze wspomnianych wyżej arkuszy. Przyjmuję, że za poprawne rozwiązanie każdego z tych zadań przyznaje się 2 pkt. Natomiast kwestia, za jakie rozwiązanie częściowe można przyznać 1 pkt, jest w każdym przypadku sprawą dyskusyjną.

Pokazuję trzy typy zadań na dowodzenie. Pierwszy polega na tzw. „rachunku kątów”. Dowód geometryczny sprowadza się do wyznaczenia miar pewnych istotnych w zadaniu kątów i wyciągnięciu właściwych wniosków z przeprowadzonych obliczeń. W takich zadaniach pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wybraniu kątów „wyjściowych” i wyznaczeniu (za ich pomocą) miar innych kątów. Dokończenie rozwiązania sprowadza się wówczas do wyciągnięcia wniosków. Drugi typ zadań to proste nierówności geometryczne, w dowodzie których wykorzystuje się tzw. nierówność trójkąta. Pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wyborze trójkątów i zapisaniu nierówności trójkąta dla nich. Znów dokończenie rozwiązania może polegać na zebraniu razem tych nierówności. Wreszcie trzeci typ zadań to proste zadania, w których korzysta się z przystawania trójkątów. Pokonanie zasadniczych trudności zadania może polegać na właściwym wyborze trójkątów i pełnym uzasadnieniu ich przystawania (dokończenie rozwiązania polega wówczas na wyciągnięciu wniosku) lub na właściwym wyborze trójkątów, stwierdzeniu ich przystawania i wyciągnięciu poprawnego wniosku przy braku pełnego uzasadnienia przystawania.

We wszystkich przedstawionych dowodach korzystamy z następujących twierdzeń geometrycznych, które powinny być dobrze znane każdemu maturzyście:

1. Suma kątów trójkąta jest równa 180°.
   - 1a. Suma kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równa 90°.
   - 1b. Kąt zewnętrzny trójkąta jest równy sumie kątów wewnętrznych do niego nieprzyległych.
   - 1c. Suma kątów czworokąta jest równa 360°.
2. Kąty wierzchołkowe są równe.
3. Suma kątów przyległych jest równa 180°.
4. Kąty przy podstawie trójkąta równoramiennego są równe.
5. Kąty odpowiadające i naprzemianległe przy dwóch prostych równoległych są równe.

5a. Suma kątów położonych przy tym samym boku równoległoboku jest równa $180°$.
5b. Przeciwległe kąty równoległoboku są równe.
6. Suma dwóch boków trójkąta jest większa od boku trzeciego.
7. Boki trójkąta położone naprzeciw równych kątów są równe.

Korzystamy także z trzech cech przystawania trójkątów.

ZADANIA

1. Rachunek kątów

1. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $\measuredangle AOB > \measuredangle ACB$.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

3. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle DCE = 45°$.

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ oraz $\measuredangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Udowodnij, że

$$\measuredangle EFD = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90° - \frac{\gamma}{2}.$$

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Udowodnij, że $\measuredangle CAD + \measuredangle DBE + \measuredangle ECA + \measuredangle ADB + \measuredangle BEC = 180°$.

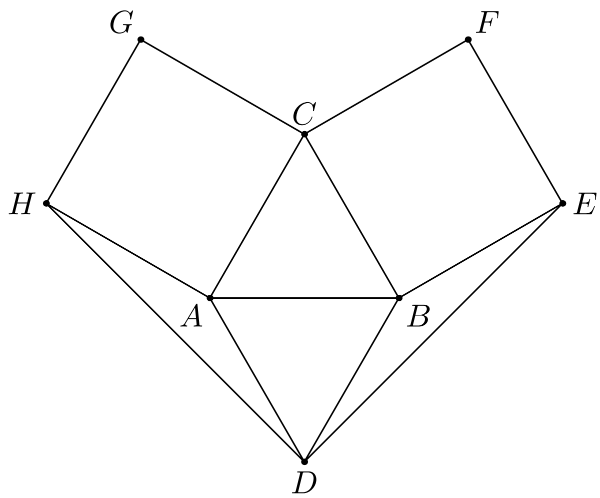
6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.

7. W równoległoboku $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, połączono środek M boku AB z wierzchołkami C i D. Udowodnij, że kąt CMD jest prosty.

8. Punkty D i E leżą odpowiednio wewnątrz boków BC i AC trójkąta ABC. Punkt F jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAD i CBE. Udowodnij, że

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 2 \cdot \measuredangle AFB.$$

9. Na bokach trójkąta równobocznego ABC, na zewnątrz trójkąta, zbudowano dwa kwadraty $BEFC$ i $ACGH$ oraz trójkąt równoboczny ABD tak jak na rysunku:



Udowodnij, że kąt HDE jest prosty.

10. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne BDA i CAD tak, że $AB = AD = CD$. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 36^\circ$.

11. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem CD na dwa trójkąty równoramienne DCA i BCD tak, że $AC = AD$ oraz $CD = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle CAB = 36^\circ$.

12. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne DAB i CAD tak, że $AB = DB$ oraz $CD = AD$. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = \frac{180^\circ}{7}$.

2. Nierówność trójkąta

13. Punkty K i L leżą na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLC jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

14. W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC. Udowodnij, że

$$2 \cdot AD > AB + AC - BC.$$

3. Przystawanie trójkątów

15. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano (na zewnątrz trójkąta) trzy trójkąty równoboczne: AFB, BDC i CEA. Udowodnij, że $AD = BE = CF$.

16. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

17. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Na półprostej AB wyznaczono punkt M ($M \neq B$) taki, że $CB = CM$, a na półprostej CB punkt N ($N \neq B$) taki, że $AB = AN$. Udowodnij, że $DM = DN$.

18. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $EB + BF = AB$. Udowodnij, że suma kątów BAF, EDF i ECB wynosi 90°.

19. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano trzy trójkąty równoboczne: APB, BRC i CQA. Trójkąt BRC leży po tej samej stronie boku BC co trójkąt ABC, pozostałe dwa leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty A, P, R i Q są współliniowe lub są wierzchołkami równoległoboku.

20. Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach podana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że $BE = DG$.

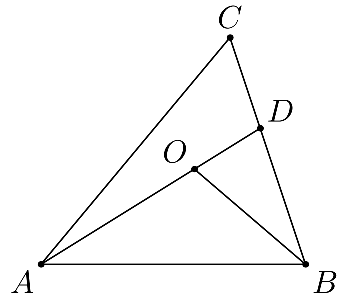
21. Punkt P leży na boku AB prostokąta $ABCD$. Punkty Q i R są rzutami punktu P na przekątne AC i BD. Punkt E jest rzutem wierzchołka A na przekątną BD. Udowodnij, że $PQ + PR = AE$.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ

1. Rachunek kątów

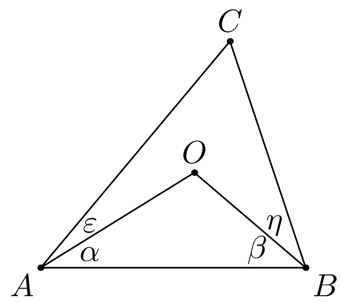
1. Punkt O leży wewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że $\measuredangle AOB > \measuredangle ACB$.

Rozwiązanie; sposób I. Przedłużmy odcinek AO do przecięcia z bokiem BC trójkąta ABC.



Kąt AOB jest kątem zewnętrznym trójkąta BDO; zatem $\measuredangle AOB > \measuredangle BDO$. Kąt BDO jest kątem zewnętrznym trójkąta ADC; zatem $\measuredangle BDO > \measuredangle ACD$. Stąd wynika, że $\measuredangle AOB > \measuredangle ACD$.

Rozwiązanie; sposób II. Oznaczmy kąty tak jak na rysunku:



Mamy wówczas

$$\measuredangle BAC = \alpha + \varepsilon, \quad \measuredangle ABC = \beta + \eta.$$

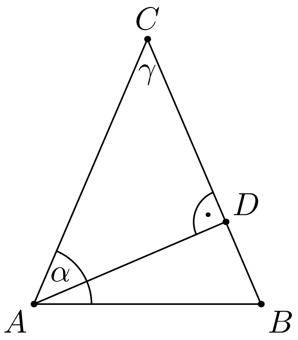
Stąd wynika, że

$$\begin{aligned}\measuredangle ACB &= 180^\circ - \measuredangle BAC - \measuredangle ABC = 180^\circ - \alpha - \beta - \varepsilon - \eta = \\ &= (180^\circ - \alpha - \beta) - (\varepsilon + \eta) = \measuredangle AOB - (\varepsilon + \eta),\end{aligned}$$

a więc $\measuredangle ACB < \measuredangle AOB$.

2. Dany jest trójkąt ostrokątny równoramienny ABC, w którym $AC = BC$. Odcinek AD jest wysokością tego trójkąta. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

Rozwiązanie. Oznaczmy $\measuredangle ACB = \gamma$ oraz $\measuredangle BAC = \alpha$.



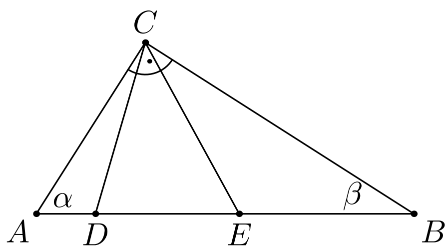
Wtedy $\gamma = 180^\circ - 2\alpha$, czyli $\alpha = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}$. Stąd dostajemy

$$\measuredangle BAD = \alpha - \measuredangle CAD = \alpha - (90^\circ - \gamma) = 90^\circ - \frac{\gamma}{2} - 90^\circ + \gamma = \frac{\gamma}{2},$$

czyli $\measuredangle ACB = \gamma = 2 \cdot \measuredangle BAD$.

3. Na przeciwprostokątnej AB trójkąta prostokątnego ABC wybrano punkty D i E w taki sposób, by $AC = AE$ oraz $BC = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle DCE = 45^\circ$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty ostre trójkąta ABC tak jak na rysunku:



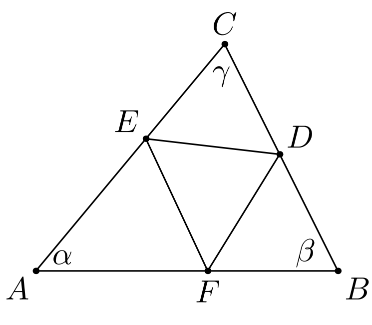
Ponieważ $AC = AE$, więc $\measuredangle ACE = \measuredangle AEC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Stąd wynika, że $\measuredangle BCE = \frac{\alpha}{2}$. W podobny sposób pokazujemy, że $\measuredangle ACD = \frac{\beta}{2}$. Zatem

$$\measuredangle DCE = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ.$$

4. Dany jest trójkąt ABC, w którym $\measuredangle BAC = \alpha$, $\measuredangle ABC = \beta$ oraz $\measuredangle ACB = \gamma$. Na bokach BC, AC i AB tego trójkąta wybrano odpowiednio punkty D, E i F w taki sposób, by $AE = AF$, $BD = BF$ i $CD = CE$. Udowodnij, że

$$\measuredangle EFD = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Rozwiązanie.



Ponieważ trójkąt FEA jest równoramienny (z założenia mamy $FA = EA$), więc

$$\measuredangle AFE = \measuredangle AEF = \frac{180^\circ - \alpha}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.$$

Podobnie trójkąt DFB jest równoramienny, skąd wynika, że

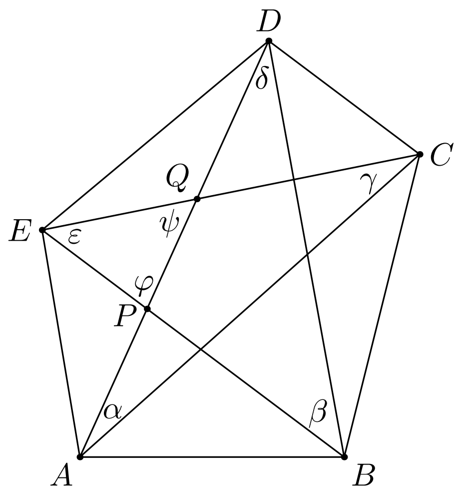
$$\measuredangle BFD = \measuredangle BDF = 90^\circ - \frac{\beta}{2}.$$

Stąd dostajemy

$$\measuredangle EFD = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{180^\circ - \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

5. W pięciokącie wypukłym $ABCDE$ poprowadzono wszystkie przekątne. Oblicz sumę kątów $\measuredangle CAD + \measuredangle DBE + \measuredangle ECA + \measuredangle ADB + \measuredangle BEC$.

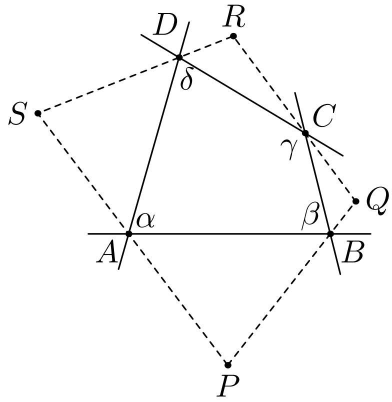
Rozwiązanie. Niech P i Q będą punktami przecięcia przekątnej AD odpowiednio z przekątnymi BE i CE. Oznaczmy kąty literami greckimi tak jak na rysunku:



Kąt φ jest kątem zewnętrznym trójkąta BDP, a więc $\varphi = \beta + \delta$. Kąt ψ jest kątem zewnętrznym trójkąta ACQ, więc $\psi = \alpha + \gamma$. Suma kątów trójkąta PQE jest równa $\varphi + \psi + \varepsilon = 180^\circ$, skąd wynika, że $\alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon = 180^\circ$.

6. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$. Punkty P, Q, R i S są punktami przecięcia dwusiecznych kątów zewnętrznych czworokąta $ABCD$. Udowodnij, że sumy przeciwległych kątów czworokąta $PQRS$ są równe.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąty tak jak na rysunku:



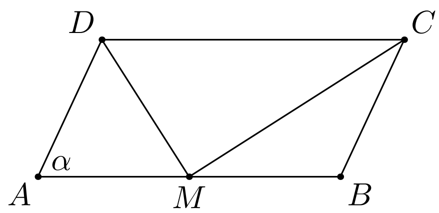
Wówczas $\measuredangle PAB = \frac{1}{2}\cdot(180^\circ - \alpha) = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Podobnie $\measuredangle PBA = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$. Stąd dostajemy $\measuredangle APB = \frac{\alpha+\beta}{2}$. W podobny sposób $\measuredangle CRD = \frac{\gamma+\delta}{2}$. Zatem

$$\measuredangle APB + \measuredangle CRD = \frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\gamma+\delta}{2} = \frac{\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} = \frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$$

i podobnie $\measuredangle BQC + \measuredangle DSA = 180^\circ$.

7. W równoległoboku $ABCD$, w którym bok AB jest dwa razy dłuższy od boku BC, połączono środek M boku AB z wierzchołkami C i D. Udowodnij, że kąt CMD jest prosty.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt BAD literą α. Trójkąty MDA i MCB są równoramienne, bo $AD = AM = MB = CB$.



Zatem $\measuredangle AMD = \frac{180^\circ - \alpha}{2}$ oraz $\measuredangle BMC = \frac{180^\circ - (180^\circ - \alpha)}{2} = \frac{\alpha}{2}$. Stąd wynika, że

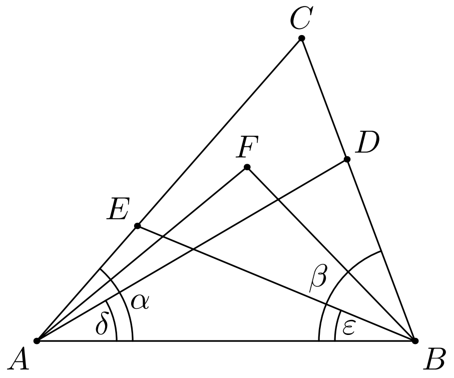
$$\measuredangle AMD + \measuredangle BMC = \frac{180^\circ - \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^\circ,$$

czyli $\measuredangle CMD = 90^\circ$.

8. Punkty D i E leżą odpowiednio wewnątrz boków BC i AC trójkąta ABC. Punkt F jest punktem przecięcia dwusiecznych kątów CAD i CBE. Udowodnij, że

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 2 \cdot \measuredangle AFB.$$

Rozwiązanie. Przyjmijmy oznaczenia: $\measuredangle CAB = \alpha$, $\measuredangle CBA = \beta$, $\measuredangle DAB = \delta$ oraz $\measuredangle EBA = \varepsilon$:



Zauważmy, że

$$\measuredangle AEB = 180^\circ - (\alpha + \varepsilon) \quad \text{oraz} \quad \measuredangle ADB = 180^\circ - (\beta + \delta).$$

Zatem

$$\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 360^\circ - (\alpha + \beta + \delta + \varepsilon).$$

Ponieważ punkt F leży na dwusiecznych kątów CAD i CBE, więc

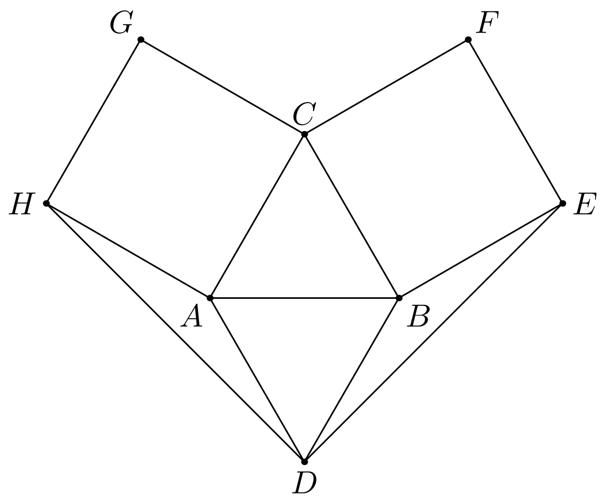
$$\measuredangle FAB = \frac{\alpha + \delta}{2} \quad \text{oraz} \quad \measuredangle FBA = \frac{\beta + \varepsilon}{2}.$$

Zatem

$$\measuredangle AFB = 180^\circ - (\measuredangle FAB + \measuredangle FBA) = 180^\circ - \frac{\alpha + \beta + \delta + \varepsilon}{2}.$$

Stąd natychmiast wynika, że $\measuredangle AEB + \measuredangle ADB = 2 \cdot \measuredangle AFB$.

9. Na bokach trójkąta równobocznego ABC, na zewnątrz trójkąta, zbudowano dwa kwadraty $BEFC$ i $ACGH$ oraz trójkąt równoboczny ABD tak jak na rysunku:



Udowodnij, że kąt HDE jest prosty.

Rozwiązanie. Ponieważ $AH = AC = AB = AD$, więc trójkąt HDA jest równoramienny. Następnie

$$\measuredangle HAD = 360^\circ - \measuredangle HAC - \measuredangle CAB - \measuredangle BAD = 360^\circ - 90^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 150^\circ,$$

skąd wynika, że

$$\measuredangle HDA = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \measuredangle HAD) = 15^\circ.$$

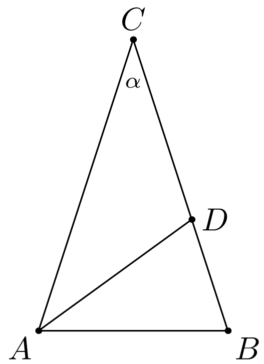
Podobnie dowodzimy, że $\measuredangle BDE = 15^\circ$. Zatem

$$\measuredangle HDE = \measuredangle HDA + \measuredangle ADB + \measuredangle BDE = 15^\circ + 60^\circ + 15^\circ = 90^\circ,$$

c. b. d. o.

10. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne BDA i CAD tak, że $AB = AD = CD$. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = 36^\circ$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt ACB literą α:



Ponieważ trójkąt CAD jest równoramienny, więc $\measuredangle CAD = \alpha$. Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta CAD, więc

$$\measuredangle ADB = \measuredangle CAD + \measuredangle ACD = 2\alpha.$$

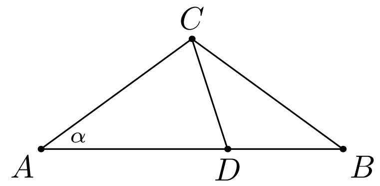
Trójkąt BDA jest równoramienny, więc $\measuredangle ABD = 2\alpha$. Wreszcie $\measuredangle BAC = \measuredangle ABC = \measuredangle ABD$, bo trójkąt ABC jest równoramienny. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie dostajemy teraz równanie

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180^\circ,$$

czyli $2\alpha + 2\alpha + \alpha = 180^\circ$. Zatem $5\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 36^\circ$.

11. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem CD na dwa trójkąty równoramienne DCA i BCD tak, że $AC = AD$ oraz $CD = BD$. Udowodnij, że $\measuredangle CAB = 36^\circ$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt BAC literą α:



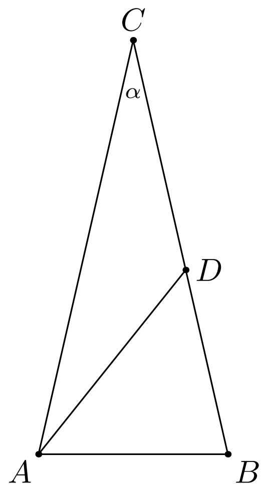
Wówczas $\measuredangle ABC = \alpha$ (bo trójkąt ABC jest równoramienny) oraz $\measuredangle BCD = \alpha$ (bo trójkąt BCD jest równoramienny). Zatem $\measuredangle ADC = \measuredangle DCB + \measuredangle BCD = 2\alpha$. Ponieważ trójkąt DCA jest równoramienny, więc $\measuredangle ACD = 2\alpha$. Stąd wynika, że $\measuredangle ACB = 3\alpha$. Mamy zatem równanie

$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180^\circ,$$

czyli $\alpha + 3\alpha + \alpha = 180^\circ$. Zatem $5\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = 36^\circ$.

12. Trójkąt równoramienny ABC, w którym $AC = BC$, rozcięto odcinkiem AD na dwa trójkąty równoramienne DAB i CAD tak, że $AB = DB$ oraz $CD = AD$. Udowodnij, że $\measuredangle ACB = \frac{180^\circ}{7}$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt ACB literą α:



Ponieważ trójkąt CAD jest równoramienny, więc $\measuredangle CAD = \alpha$. Ponieważ kąt ADB jest kątem zewnętrznym trójkąta CAD, więc

$$\measuredangle ADB = \measuredangle CAD + \measuredangle ACD = 2\alpha.$$

Trójkąt DAB jest równoramienny, więc $\measuredangle BAD = 2\alpha$. Stąd wynika, że $\measuredangle BAC = 3\alpha$ oraz $\measuredangle ABC = \measuredangle BAC = 3\alpha$, bo trójkąt ABC jest równoramienny. Z twierdzenia o sumie kątów w trójkącie dostajemy teraz równanie

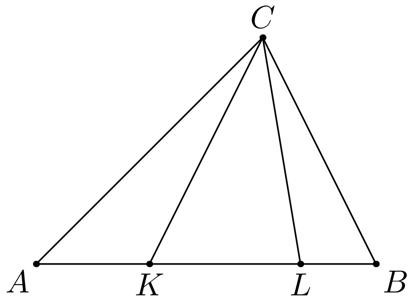
$$\measuredangle BAC + \measuredangle ABC + \measuredangle ACB = 180^\circ,$$

czyli $3\alpha + 3\alpha + \alpha = 180^\circ$. Zatem $7\alpha = 180^\circ$, czyli $\alpha = \frac{180^\circ}{7}$.

2. Nierówność trójkąta

13. Punkty K i L leżą na boku AB trójkąta ABC. Udowodnij, że obwód trójkąta KLC jest mniejszy od obwodu trójkąta ABC.

Rozwiązanie.



Korzystamy dwukrotnie z nierówności trójkąta:

$$KC < AK + AC,$$
$$LC < LB + BC.$$

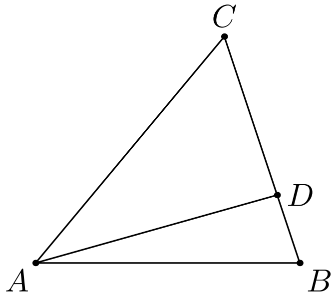
Dodajemy stronami te nierówności, a następnie do obu stron dodajemy KL:

$$KC + LC + KL < AK + AC + LB + BC + KL = AB + AC + BC.$$

14. W trójkącie ABC połączono wierzchołek A z dowolnym punktem D boku BC. Udowodnij, że

$$2 \cdot AD > AB + AC - BC.$$

Rozwiązanie. Korzystamy dwukrotnie z nierówności trójkąta dla trójkątów ABD i ACD:



Otrzymujemy

$$AB < AD + BD,$$
$$AC < AD + CD.$$

Po dodaniu tych nierówności stronami, otrzymujemy

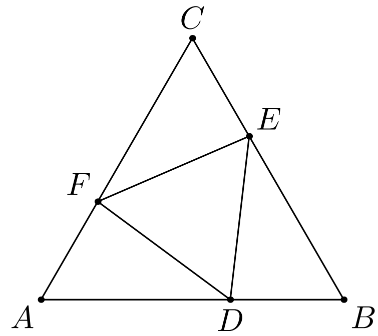
$$AB + AC < 2 \cdot AD + BD + CD = 2 \cdot AD + BC,$$

czyli $2 \cdot AD > AB + AC - BC$.

3. Przystawanie trójkątów

15. Na bokach AB, BC i CA trójkąta równobocznego ABC leżą odpowiednio punkty D, E i F tak, że $AD = BE = CF$. Udowodnij, że trójkąt DEF jest równoboczny.

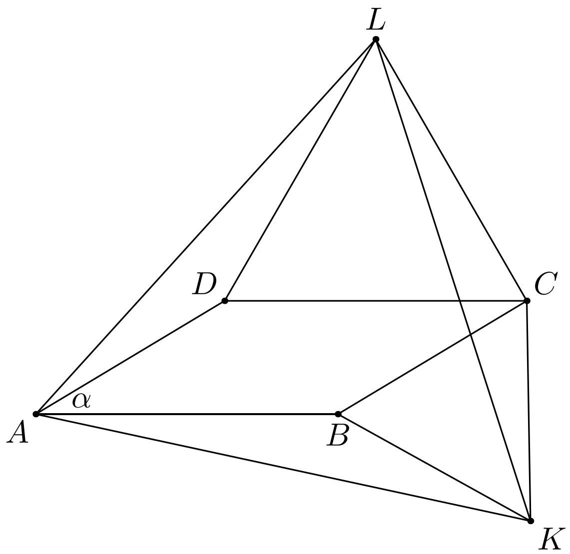
Rozwiązanie. Ponieważ $AD = BE = CF$ i $AB = BC = CA$, więc $DB = EC = FA$.



Teraz zauważamy, że $\triangle ADF \equiv \triangle BED \equiv \triangle CFE$ (cecha przystawania BKB), skąd wynika, że $DE = EF = FA$.

16. Na bokach BC i CD równoległoboku $ABCD$ zbudowano (na zewnątrz równoległoboku) trójkąty równoboczne BCK i DCL. Udowodnij, że trójkąt AKL jest równoboczny.

Rozwiązanie. Przypuśćmy, że kąt α jest kątem ostrym równoległoboku oraz $\alpha < 60°$. Pozostałe przypadki pozostawimy jako ćwiczenie.



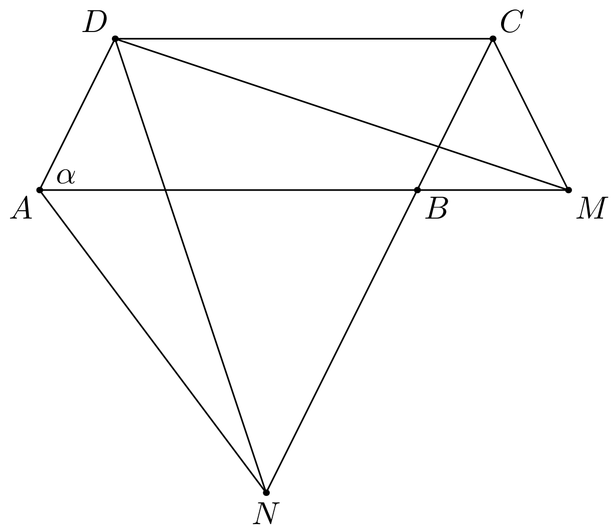
Wówczas $AB = LD = LC$ oraz $BK = DA = CK$. Ponadto

$$\measuredangle ABK = 360° - \measuredangle ABC - \measuredangle CBK = 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha,$$
$$\measuredangle LDA = 360° - \measuredangle ADL - \measuredangle LDC = 360° - (180° - \alpha) - 60° = 120° + \alpha,$$
$$\measuredangle LCK = \measuredangle BCD + \measuredangle BCK + \measuredangle LCD = \alpha + 60° + 60° = 120° + \alpha.$$

Stąd wynika, że trójkąty ABK, LDA i LCK są przystające, a więc $AK = LA = LK$.

17. Dany jest równoległobok $ABCD$ z kątem ostrym przy wierzchołku A. Na półprostej AB wyznaczono punkt M ($M \neq B$) taki, że $CB = CM$, a na półprostej CB punkt N ($N \neq B$) taki, że $AB = AN$. Udowodnij, że $DM = DN$.

Rozwiązanie. Oznaczmy kąt BAD literą α



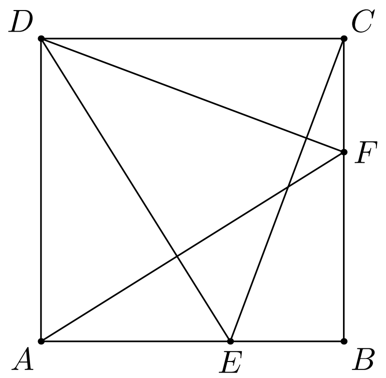
Wtedy $\measuredangle BCD = \alpha$. Zauważmy następnie, że trójkąty BMC i NBA są równoramienne i ich kąty przy podstawie są równe (bo kąty MBC i NBA są wierzchołkowe). Zatem $\measuredangle BCM = \measuredangle NAB$ i stąd wynika, że

$$\measuredangle NAD = \measuredangle NAB + \alpha = \measuredangle BCM + \alpha = \measuredangle DCM.$$

Zatem trójkąty NAD i DCM są przystające (cecha przystawania BKB) i $DN = DM$.

18. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano odpowiednio punkty E i F takie, że $EB + BF = AB$. Udowodnij, że suma kątów BAF, EDF i ECB wynosi $90°$.

Rozwiązanie. Ponieważ $EB = BF$, więc $AE = AB - EB = AB - (AB - BF) = BF$. Zatem także $EB = FC$.

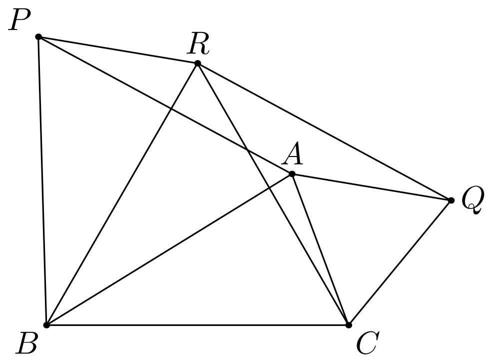


Z założeń wynika, że trójkąty ABF i DAE są przystające ($AB = DA$, $AE = BF$, $\measuredangle ABF = \measuredangle DAE = 90°$, cecha przystawania BKB). Podobnie trójkąty CBE i DCF są przystające. Stąd wynika, że

$$\measuredangle BAF + \measuredangle EDF + \measuredangle ECB = \measuredangle ADE + \measuredangle EDF + \measuredangle FDC = \measuredangle ADC = 90°.$$

19. Na bokach AB, BC i CA trójkąta ABC zbudowano trzy trójkąty równoboczne: APB, BRC i CQA. Trójkąt BRC leży po tej samej stronie boku BC co trójkąt ABC, pozostałe dwa leżą na zewnątrz trójkąta ABC. Udowodnij, że punkty A, P, R i Q są współliniowe lub są wierzchołkami równoległoboku.

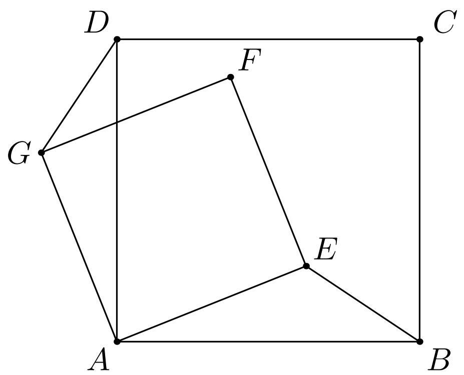
Rozwiązanie. Przypuśćmy, że punkty A, P, R i Q nie są współliniowe. Rozpatrujemy tylko przypadek, gdy $\measuredangle CBA < 60°$, tzn. gdy półprosta BA leży wewnątrz kąta CBR. Pozostałe przypadki zostawiamy Czytelnikowi.



Trójkąty BAC i BRP są przystające ($\measuredangle CBA = 60° - \measuredangle ABR = \measuredangle RBP$, $BC = BR$, $BA = BP$, cecha przystawania BKB). Zatem $PR = AC$. W podobny sposób dowodzimy, że trójkąty BCA i RCQ są przystające. Zatem $AQ = QC = AC$. Stąd wynika, że $PR = AQ$. Z tego drugiego przystawania wynika również, że $PA = BA = RQ$. Czworokąt $PAQR$ ma zatem przeciwległe boki równe, a więc jest równoległobokiem.

20. Dane są dwa kwadraty: $ABCD$ i $AEFG$. W obu kwadratach podana kolejność wierzchołków jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara. Udowodnij, że $BE = DG$.

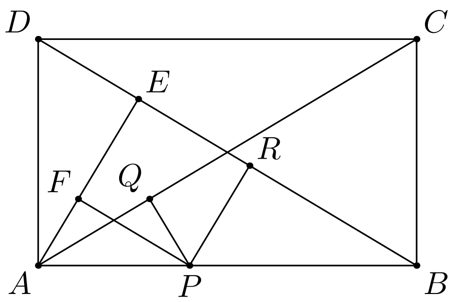
Rozwiązanie. Rozpatrujemy przypadek, gdy wierzchołek E leży wewnątrz kwadratu $ABCD$.



Trójkąty ABE i ADG są przystające ($\measuredangle BAE = 90° - \measuredangle EAD = \measuredangle DAG$, $AB = AD$, $AE = AG$, cecha przystawania BKB). Zatem $BE = DG$.

21. Punkt P leży na boku AB prostokąta $ABCD$. Punkty Q i R są rzutami punktu P na przekątne AC i BD. Punkt E jest rzutem wierzchołka A na przekątną BD. Udowodnij, że $PQ + PR = AE$.

Rozwiązanie. Niech E będzie rzutem punktu A na przekątną BD i niech F będzie rzutem punktu P na odcinek AE.



Czworokąt $PREF$ jest prostokątem, więc $PR = FE$. Zauważamy teraz, że $PF \parallel BD$, skąd wynika, że $\measuredangle APF = \measuredangle ABD = \measuredangle BAC = \measuredangle PAQ$. Stąd wynika, że trójkąty prostokątne APF i PAQ są przystające. Zatem $PQ = AF$, czyli $PQ+PR = AF+FE = AE$, co kończy dowód.