DOWODY NIERÓWNOŚCI

ZADANIE 1
Wykaż, że jeżeli x, y, z są długościami boków trójkąta to $\frac{\sqrt{3}(x+y+z)}{2} > \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

ZADANIE 2
Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c i d prawdziwa jest nierówność

$$ac + bd \leqslant \sqrt{a^2+b^2} \cdot \sqrt{c^2+d^2}.$$

ZADANIE 3
Udowodnij, że jeżeli $a \geqslant b > 0$ to $\frac{(a+b)}{2} - \sqrt{ab} \geqslant \frac{(a-b)^2}{8a}$.

ZADANIE 4
Uzasadnij, że jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi to

$$(a+b)(c+d) \geqslant 4\sqrt{abcd}.$$

ZADANIE 5
Uzasadnij, że $61^{16} < 18^{24}$.

ZADANIE 6
Uzasadnij, że jeżeli a, b, c, d są liczbami dodatnimi to

$$\sqrt{(a+c)(b+d)} \geqslant \sqrt{ab} + \sqrt{cd}.$$

ZADANIE 7
Niech $m, n \in \mathbb{R}_+$, udowodnij, że jeżeli $m + n = 1$ to prawdziwa jest nierówność $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \geqslant 4$.

ZADANIE 8
Wykaż, że jeżeli $a > 1$ to prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{a^{50}-1} + \sqrt{a^{50}+1} < 2a^{25}.$$

ZADANIE 9
Wykaż, że dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b spełniona jest nierówność

$$\sqrt[4]{\frac{a^4+b^4}{2}} \geqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

ZADANIE 10
Wykaż, że prawdziwa jest nierówność $\sqrt{2^{50}+1}+\sqrt{2^{50}-1} < 2^{26}$.

ZADANIE 11
Uzasadnij, że jeśli liczby rzeczywiste a, b, c spełniają nierówności $0 < a < b < c$, to

$$\frac{a+b+c}{3} > \frac{a+b}{2}.$$

ZADANIE 12
Wykaż, że jeżeli $xy > 0$ to $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$.

ZADANIE 13

a) Wykaż, że dla dowolnych różnych liczb dodatnich a, b prawdziwa jest nierówność

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

b) Wykorzystując nierówność z punktu a), wykaż, że prawdziwa jest nierówność

$$\sqrt{2^{100}-2}+\sqrt{2^{100}+2} < 2^{51}.$$

ZADANIE 14
Wykaż, że jeżeli $a > 0$, to $\frac{a}{2}+\frac{1}{2a^2} \geqslant \frac{2a}{a^3+1}$.

ZADANIE 15
Udowodnij, że jeśli k i n są liczbami naturalnymi oraz $1 \leqslant k \leqslant n$, to $k(n-k+1) \geqslant n$.

ZADANIE 16
Udowodnij, że jeśli

a) x, y są liczbami rzeczywistymi, to $x^2+y^2 \geqslant 2xy$.

b) x, y, z są liczbami rzeczywistymi takimi, że $x+y+z=1$, to $x^2+y^2+z^2 \geqslant \frac{1}{3}$.