Fundusze Europejskie Program Regionalny

Podlaskie

Unia Europejska Europejski Fundusz Społeczny

Praca zbiorowa nauczycieli matematyki z IV LO w Białymstoku.

Autorzy: Małgorzata Bajguz, Beata Bućko, Marzenna Popławska, Wiesława Suchocka, Jolanta Świerzyńska, Piotr Worobiej.

SZKOŁA JUTRA

MATEMATYKA

ZBIÓR ZADAŃ

DOBREGO NIGDY ZA WIELE

Publikacja powstała w ramach realizacji projektu SZKOŁA JUTRA

w IV Liceum Ogólnokształcącym im. Cypriana Kamila Norwida w Białymstoku

Na rynku wydawniczym jest wiele publikacji pomocnych w przygotowaniu uczniów do egzaminu maturalnego z matematyki.

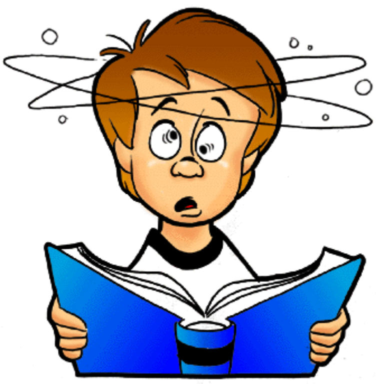
Dlaczego zatem napisaliśmy kolejną propozycję ćwiczeń?

Po pierwsze - DOBREGO NIGDY ZA WIELE, a poza tym zadania do tego zbioru są „szyte na miarę potrzeb” naszych uczniów.

Chcemy zwrócić uwagę na treści matematyczne, które na sprawdzianach i egzaminach wypadały najsłabiej.

Nie podajemy gotowych rozwiązań **zachęcając do samodzielnych poszukiwań oraz konsultacji z nauczycielami.**

1. Na dobry początek … wzory skróconego mnożenia



1.1. Wyrażenie $(a^2+b^2)^2$ jest równe:

$A)\ (a-b)^3 \cdot (a+b)$

$B)\ (a^2+b^2)+2ab$

$C)\ [(a-b)^2+2ab]^2$

$D)\ (a^2+b^2)-(2ab)^2$

$E)\ (a+b)^3 \cdot (a+b)$

1.2. Które z podanych wyrażeń da się zapisać jako kwadrat sumy/różnicy wyrażenia

$A)\ 4x^2 - 6x + 9$

$B)\ 4x^2 + 9$

$C)\ 4x^2 - 12x + 9$

$D)\ 4x^2 + 6x + 9$

$E)\ 4x^2 + 12x - 9$

1.3. Jeżeli obliczymy kwadrat wyrażenia $(a + b + c)$ to ile wyrazów uzyskamy?

$A)$ 6

$B)$ 5

$C)$ 4

$D)$ 3

$E)$ 2

1.4. Które wyrażenie jest poprawne?

$A)\ (a + b)^3 = a^3 + b^3$

$B)\ (a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab$

$C)\ (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$D)\ (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a + 1$

$E)\ (a + 1)^3 = a^3 - 3a^2 + 3a - 1$

1.5. $(x + 5)(x^2 - 5x + 25) = ?$

$A)\ (x + 5)^3$

$B)\ (x + 5)^2(x - 5)$

$C)\ (x - 5)^2(x + 5)$

$D)\ x^3 - 125$

$E)\ x^3 + 125$

1.6. $\left(a^{1/2} - 5\right)^2 + 10 \cdot a^{1/2} = ?$

$A)\ a - 25$

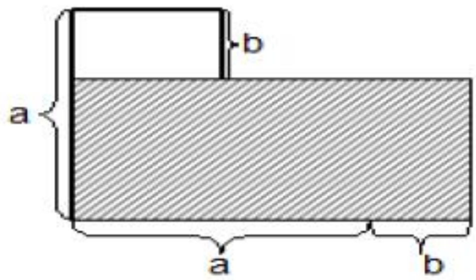
$B)\ a + 25$

$C)\ (\sqrt{a}+5)^2$

$D)\ \sqrt{a}-20a+25$

$E)\ \sqrt{a}+\sqrt{10}+25$

1.7. Które z wyrażeń opisuje pole zakreskowanej części?



$A)\ 2a\cdot 2b$

$B)\ 2a+2b$

$C)\ a^2-b^2$

$D)\ (a-b)^2$

$E)\ (a+b)^2$

1.8. Jeżeli $x=100^{2017}$ i $y=100^{-2017}$ to wartość wyrażenia $(x+y)^2-(x-y)^2$ jest równa:

$A)\ 100^{2016}$

$B)\ 0{,}02$

$C)\ 2$

$D)\ 4$

$E)\ 2\cdot 100^{2016}$

1.9. Jeżeli $a=\sqrt{2}$ i $b=-\sqrt{2}$ to wartość wyrażenia $(a+2b)^2-(a-2b)^2$ jest równa

$A)\ 20$

$B)\ -16$

$C)\ 16$

$D)\ -8\sqrt{2}$

$E)\ 16\sqrt{2}$

1.10. Które liczby są rozwiązaniami równania $x^2 + (x-4)^2 = 400$

$A) -16, -12$

$B) -16, 12$

$C) 16, -12$

$D) 12, -34$

$E) 34, -12$

1.11. Jeżeli $x^3 + 4x^2y - y^3 = 2$ i $7x^2y - 3xy^2 = 10$ to wyrażenie $x - y$ jest równe:

$A) -2$

$B) -4$

$C) -6$

$D) -8$

$E) -10$

1.12. Które z podanych wyrażeń są poprawne?

I. $4m^2 - n^2 = (2m-n)(2m+n)$

II. $(a+b)^2 = a^2 + b^2$

III. $(x-y+2)^2 = x^2 + y^2 + 4 + 2(2x - 2y - xy)$

IV. $(p-2)^3 = p^3 - 6p^2 + 12p - 4$

$A)\ I, II$

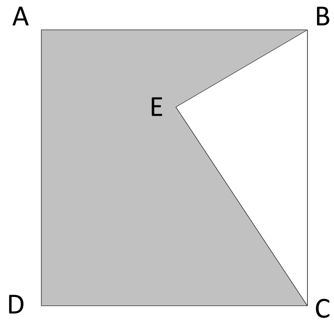
$B)\ I, III$

$C)\ I, II, III$

$D)\ II, III, IV$

$E)\ II, IV$

1.13. Czworokąt $ABCD$ jest kwadratem o boku długości 15 cm. Trójkąt BEC jest prostokątny, ale nie jest równoramienny. Jeżeli pole pokolorowanej części ma $171\ \mathrm{cm}^2$ to jaki jest obwód pokolorowanej części?



A) 62

B) 64

C) 66

D) 68

E) 70

1.14. Jeżeli $101^2 - 91^2 = 20x$ to wartość x wynosi:

A) 98

B) 97

C) 96

D) 95

E) 94

1.15. Po rozłożeniu wyrażenia $x^2 - 4x - y^2 + 6y - 5$ na czynniki jednym z tych czynników w postaci iloczynowej jest:

A) $x - y - 2$

B) $x - y - 1$

C) $x + y - 4$

D) $x + y - 5$

E) $x - y + 2$

1.16. Jeżeli $x+\frac{1}{x}=5$ to $x^2+\frac{1}{x^2}$ jest równe:

$A)$ 8

$B)$ 10

$C)$ 23

$D)$ 24

$E)$ 25

1.17. Jeżeli $x+\frac{1}{x}=3$ to $x^3+\frac{1}{x^3}$ jest równe:

$A)$ 27

$B)$ 18

$C)$ 9

$D) -3$

$E) -18$

1.18. Wyrażenie $\frac{2x^3+16}{4x^2-16}$ dla $x \epsilon R-\{-2,2\}$ po skróceniu jest równe:

$A)\ \frac{x^2-2x+4}{2x-4}$

$B)\ \frac{x+16}{-6}$

$C)\ \frac{2x+4}{-3}$

$D)\ \frac{1}{2}$

$E)\ \frac{x}{2}$

1.19. Wyrażenie $4(x+3)^2 - 49(1-x)^2$ po zamianie na iloczyn jest równe:

$A)\ (9x-1)(13-5x)$

$B)\ (53x-37)(61-45x)$

$C)\ (-5x-1)(61-45x)$

$D)\ (-45x-37)(61-45x)$

$E)\ [2(x+3)-7(1-x)]^2$

1.20. Najprostsza postać wyrażenia $\left(\sqrt{\sqrt{2}-1} - \sqrt{\sqrt{2}+1}\right)^2$ wynosi

$A)\ -2$

$B)\ 2\sqrt{2}-2$

$C)\ 2\sqrt{2}+2$

$D)\ 2\sqrt{2}$

$E)\ 2$

2. Podstawowe równania i nierówności.

2.1. Rozwiąż równania:

2.1.1. $2-(4-x)(x+4) = (x-1)^2$ **(ODP. $x = 7,5$)**

2.1.2. $(x-3)^2 - (2-x)^2 = 4x+1$ **$\left(\text{ODP. } x = \frac{2}{3}\right)$**

2.1.3. $(4^5 \cdot x + 32^2) \cdot 2^5 = 2^{16} \cdot x$ **(ODP. $x = 1$)**

2.1.4. $(x^2-4)(x^2+4) = 0$ **(ODP. $x = 2 \vee x = -2$)**

2.1.5. $\left(\frac{x+5}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{x+5}{2}\right) + 1 = 0$ **(ODP. $x = -3$)**

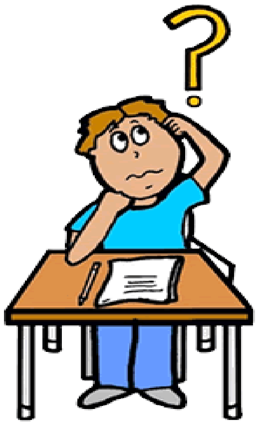
2.1.6. $(x+\sqrt{3})^2 - 4(x+\sqrt{3}) = 5$ **(ODP. $x = -1-\sqrt{3} \ \vee\ x = 5-\sqrt{3}$)**

2.1.7. $9x(x^2-4)(x^2+4) = 0$ **(ODP. $x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$)**

2.1.8. $x^2(x-1) - x(x-1) - 6(x-1) = 0$ **(ODP. $x = 1 \vee x = -2 \vee x = 3$)**

2.1.9. $\frac{3x-7}{x+3} = \frac{x-4}{2x-9}$ **(ODP. $x = 3 \vee x = 5$)**

2.1.10. $1 + \frac{2}{x} = x$ **(ODP. $x = -1 \vee x = 2$)**



2.1.11. $\frac{3\sqrt{3}-x}{2x+\sqrt{3}} = -1$ **(ODP. $x = -4\sqrt{3}$)**

2.1.12. $(3x-2)^3 = -27$ **$\left(\text{ODP. } x = -\frac{1}{3}\right)$**

2.1.13. $(x+4)^4 = 81$ **(ODP. $x = -1 \ \vee\ x = -7$)**

2.1.14. $\frac{x+5}{11} = \frac{1}{x-5}$ **(ODP. $x = 6 \ \vee\ x = -6$)**

2.1.15. $\frac{(x^2-25)(x-1)}{(x-5)(x-2)} = 0$ **(ODP. $x = 1 \ \vee\ x = -5$)**

2.1.16. $x^3 - 9x^2 + 8x = 72$ **(ODP. $x = 9$)**

2.1.17. $4 + 6 + 8 + 10 + \cdots + x = 130$ **(ODP. $x = 22$)**

2.1.18. $(4x - 2^{50})(2x + 4^{50}) = 0$ **(ODP. $x = 2^{48} \vee x = -2^{99}$)**

2.1.19. $x = -x^{-1} + 2$ **(ODP. $x = 1$)**

2.1.20. $0{,}25 \cdot log_2 x^2 - 1 = 0$ **(ODP. $x = 4 \ \vee\ x = -4$)**

2.2. Rozwiąż nierówności:

2.2.1. $(\mathrm{x}-5)^2+(\mathrm{x}+5)^2>2$ $(\mathbf{ODP.\ x \in \mathcal{R}})$

2.2.2. $(1-2x)^2 \geq 4$ $\left(\mathbf{ODP.\ x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2},\ \infty\right)}\right)$

2.2.3. $(x-3)(5-x)>0$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (3,5)})$

2.2.4. $4x-x^2 \leq 0$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-\infty, 0\rangle \cup \langle 4,\ \infty)})$

2.2.5. $(1-\sqrt{3})x<1+\sqrt{3}$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-2-\sqrt{3}, \infty)})$

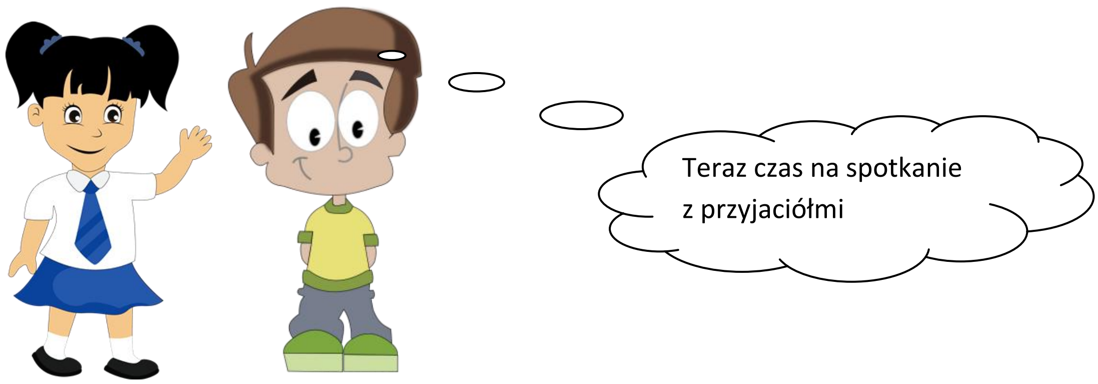
2.2.6. $-4x(x+2)<0$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty)})$

2.2.7. $x(x+2) \leq -1$ $(\mathbf{ODP.\ x \in \{-1\}})$

2.2.8. $x+2>x\sqrt{3}$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-\infty, 1+\sqrt{3})})$

2.2.9. $\frac{36}{x^2-36}>0$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-\infty, -6) \cup (6, \infty)})$

2.2.10. $\frac{-5}{x-10}>0$ $(\mathbf{ODP.\ x \in (-\infty, 10)})$



3. Z ŻYCIA WZIĘTE, CZYLI …. MATEMATYKA W PRAKTYCE.

3.1. Bartek zbierał jabłka przez czternaście dni. Sadownik płacił mu za 1 kg owoców 80 gr. Każdego dnia chłopiec zbierał o 5 kilogramów więcej niż poprzedniego dnia. Oblicz, ile kilogramów zebrał pierwszego dnia, jeśli łączny zarobek wyniósł 700 zł. **(ODP. 30 kg)**

3.2. Bartek i jego siostra Kasia prognozowali jakie zyski przyniesie im wakacyjna sprzedaż jabłek. Poniższa tabela podaje prognozy i rzeczywiste zyski obu osób.

	Prognoza	Stan faktyczny
Bartek	750 zł	700 zł
Kasia	380 zł	420 zł

a) Oblicz błędy bezwzględne przybliżeń (prognozy) obu osób.
(ODP. Bartek – 50 zł, Kasia – 40 zł)

b) Oblicz błąd względny (w procentach) i oceń, które z nich popełniło mniejszy błąd, prognozując zyski.

(ODP. Bartek – ok. 7,1%, Kasia – ok. 9,5%, Bartek popełnił mniejszy błąd)

3.3. Bartek pracując razem z Kasią posprzątałby wszystkie liście w ogrodzie w ciągu 4 godzin. Kasia pracując sama wykonałaby tę pracę w ciągu 6 godzin. Ile godzin zajęłaby ta praca Bartkowi, gdyby musiał to robić sam? **(ODP. 12godz)**

3.4. Bartek dostał od mamy za sprzątanie liści premię w wysokości 50 zł, a Kasia - 75 zł. O ile procent większą kwotę pieniędzy otrzymała Kasia? O ile procent mniej pieniędzy niż Kasia otrzymał Bartek? **(ODP. 50%, $33\frac{1}{3}\%$)**

3.5. Kasia wpłaciła 2500 zł na lokatę oprocentowaną 4% w skali roku z kwartalną kapitalizacją odsetek. Jaką kwotę otrzyma po trzech latach? **(ODP. 2817,06 zł)**

3.6. Kasia kierując skuterem przejechała połowę drogi z prędkością 60 km/h. Drugą połowę jechał Bartek z prędkością 90 km/h. Jaka była średnia prędkość na całej trasie? **(ODP. 72km/h)**

3.7. Bartek zepsuł swój ulubiony skuter. W warsztacie podano mu szacunkowy koszt naprawy. Rzeczywisty koszt był wyższy i wyniósł 400 zł. Jaki był koszt szacunkowy, jeśli błąd względny popełniony przy wstępnym szacowaniu kosztów naprawy wyniósł 25%? **(ODP. 300 zł)**

3.8. Ponieważ skuter nadal jest w naprawie Bartek drogę długości 14,5 km pokonał pieszo. Zajęło mu to przejście cztery godziny. Jaką odległość przeszedł w czasie pierwszej godziny, jeżeli w ciągu każdej kolejnej godziny pokonywana odległość była o $\frac{1}{2}$ mniejsza niż godzinę wcześniej? **(ODP. 8)**

3.9. Kasia nie lubi spacerów, ale postanowiła codziennie ćwiczyć aerobik. Obiecała sobie, że pierwszego dnia będzie ćwiczyła 10 minut, a każdego następnego dnia o 5 minut dłużej, niż dnia poprzedniego.

a) Którego dnia będzie ćwiczyć 2 godziny? **(ODP. 23 dnia)**

b) Ile kilokalorii spali Kasia ćwicząc aerobik przez 23 początkowe dni, jeśli w ciągu godziny aerobiku spala 300 kcal? **(ODP. 7475)**

3.10. 150 uczniów z klas biol-chem wypełniło deklaracje maturalne dotyczące przystąpienia do egzaminów dodatkowych z poszczególnych przedmiotów. Otrzymano następujące wyniki: 80 uczniów zadeklarowało biologię, 71 – chemię, 55 – fizykę, 45 – biologię i chemię, 24 – biologię i fizykę, 20 – chemię i fizykę, 3 osoby – wszystkie trzy przedmioty. Ilu uczniów nie wybrało żadnego z tych przedmiotów? **(ODP. 20)**

 Projekt SZKOŁA JUTRA realizowany w IV Liceum Ogólnokształcącym w Białymstoku jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podlaskiego na lata 2014-2020

3.11. Bartek dostał od koleżanki numer telefonu. Niestety złośliwy piesek nadgryzł karteczkę i zniszczył informację o trzech ostatnich cyfrach. Ile istnieje kombinacji tego trzyznakowego kodu, wiedząc, że numer jest liczbą podzielną przez 25? **(ODP. 40)**

3.12. Bartek dowiedział się, że koszt brutto wysłania MMS-a za granicę w usłudze jego operatora wynosi 14,64 zł. Jaka jest wartość netto tego MMS-a, jeżeli na koszt brutto MMS-a składa się również 19% podatku dochodowego i 23% podatku VAT? **(ODP. 10 zł)**

3.13. W naszym liceum 96% uczniów posiada telefony komórkowe. Pozostałych 36 uczniów nie posiada telefonów komórkowych. Ilu uczniów liczy nasza szkoła? **(ODP. 900)**

3.14. Bartek jest w stanie policzyć wszystkie gruszki na wierzbie w ciągu 5 godzin. Kasia może to zrobić w ciągu 8 godzin. Chłopiec rozpoczął liczenie o godzinie 6.00. O której powinna dołączyć do niego Kasia, aby informacja o ilości wszystkich gruszek na tym drzewie była znana o 10.00? **(ODP. 8:24)**

3.15. Gdy Kasia miała tyle lat, ile Bartek ma teraz, była od niego cztery razy starsza. Gdy Bartek będzie w obecnym wieku Kasi, ta będzie miała czterdzieści lat. Ile lat ma każde z nich? **(ODP. Bartek 16 lat, Kasia 28 lat)**

3.16. Średnia wieku rodziców i dwójki ich dzieci (Bartka i Kasi) to 36 lat. Gdyby uwzględnić wiek babci, to średnia wieku wszystkich pięciu osób byłaby równa 43 lata. Oblicz, ile lat ma babcia. **(ODP. 71 lat)**

3.17. Bartka od dłuższego czasu nurtował następujący problem: gdyby równik potraktować jako obręcz dookoła ziemi i długość równika zwiększyć o 10 metrów, to czy przez „szczelinę" która się wytworzy przeciśnie się człowiek?
Kasia twierdzi, że nie, ale Bartek upiera się, że przejdzie bez czołgania się. Które z dzieci ma rację? Odpowiedź uzasadnij.
(ODP. Bartek ma rację, przejdzie człowiek o wzroście do 1,59m)

3.18. Ścieżka rowerowa wokół białostockiego parku ma długość 15 km. Bartek i Kasia startują z tego samego miejsca i jadą w tym samym kierunku. Średnia prędkość Bartka jest o 5 km/h większa niż prędkość Kasi. Do ponownego spotkania rowerzystów doszło, gdy Bartek wykonał 4 okrążenia, a Kasia 3. Oblicz średnie prędkości naszych cyklistów?
(ODP. Bartek 20km/h, Kasia 15km/h)

3.19. Bartek wraz z siostrą i rodzicami uzgodnili, że o tym, kto rano ma iść po świeże bułeczki będzie decydował los. Przygotowali cztery jednakowe kartki, przy czym jedną nich oznaczono literą **X**. Ta osoba, która wylosuje oznaczoną kartkę będzie musiała pójść po zakupy. Która osoba w kolejności losowania, tj. losując jako pierwsza, druga, trzecia czy czwarta ma największą szansę wyjścia po bułki? Odpowiedź uzasadnij. **(ODP. Wszyscy mają taką samą szansę)**

3.20. Bartek wraz z rodzicami postanowili wykupić w biurze turystycznym zagraniczną wycieczkę. Wzrost kursu euro spowodował jednak podwyżkę ceny wycieczki o 5%. Nowa cena nie była zachęcająca i już mieli zrezygnować, gdy właściciel biura obniżając nową cenę o 8% zaproponował cenę promocyjną równą 1449 zł. Oblicz początkową cenę wycieczki. **(ODP. 1500 zł)**

4. KOGEL MOGEL, CZYLI … WSZYSTKO W JEDNYM

4.1. Oblicz: $3-(-3)^2-(-3)^3-(-3)^4$ **(ODP. – 60)**

4.2. Oblicz: $(-4)^3-4^3-((-4)^4+4^4)$ **(ODP. – 640)**

4.3. Oblicz: $2\cdot(2-(-2)^3)-\left(2-(2-2^2)\right)$ **(ODP. 12)**

4.4. Oblicz: $3-\{9-[18-(-2)^3\cdot(-3)^2]\}$ **(ODP. 94)**

4.5. Oblicz: $\dfrac{4\cdot 2^{-2}-\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+9\cdot 3^{-1}}{20^{-1}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{-2}-16\cdot\left(-\frac{4}{3}\right)^{-3}}$ $\left(\textbf{ODP. } \frac{25}{54}\right)$

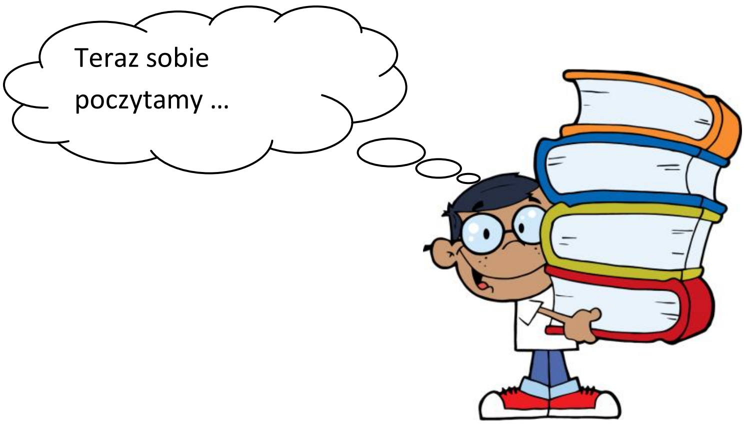
4.6. Oblicz: $(2^3-2^2\cdot 2^0)\cdot 0{,}25^{-4}$ **(ODP. 1024)**

4.7. Oblicz: $4^{-10}\cdot(8^3-2^9)$ **(ODP. 0)**

4.8. Oblicz $\frac{4}{5}-\left[\frac{(-2)^3}{0{,}2}+\frac{0{,}6}{0{,}02}:\frac{6}{5}\right]$ **(ODP. 15,8)**

4.9. Oblicz $\sqrt{180}\cdot\sqrt{80}$ **(ODP. 120)**

4.10. Dane są liczby $x=1+\sqrt{3}$ oraz $y=1-\sqrt{3}$. Oblicz x^2-y^2 **(ODP. $4\sqrt{3}$)**



4.11. Liczba $0{,}4(2)$ jest równa liczbie

A. $\frac{21}{50}$ B. $\frac{2}{5}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{19}{45}$

4.12. Połową liczby 8^{200} jest

A. 2^{599} B. 2^{400} C. 8^{100} D. 8^{199}

 Projekt SZKOŁA JUTRA realizowany w IV Liceum Ogólnokształcącym w Białymstoku jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podlaskiego na lata 2014-2020

4.13. Liczba $x = 4 + \log_3 2$. Wtedy

A. $x = log_3 243$ B. $x = log_3 162$ C. $x = log_3 128$ D. $x = log_3 6$

4.14. Jaka cyfra znajduje się na piętnastym miejscu po przecinku w rozwinięciu dziesiętnym liczby 4,3(201).

A) 3 B) 2 C) 0 D) 1

4.15. Wskaż równość prawdziwą:

A) $-458^2 = (-458)^2$ B) $458^3 = (-458)^3$

C) $\sqrt{(-458)^2} = -458$ D) $\sqrt[3]{-456} = -\sqrt[3]{458}$

4.16. Oblicz wartość wyrażenia $|2\sqrt{5}+4|+|6\sqrt{5}-18|-|12-4\sqrt{5}|$ **(ODP. 10)**

4.17. Oblicz odwrotność liczby $2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{4}{3}}$. Zapisz odpowiedź w postaci potęgi liczby 2.

(ODP. $2^{-\frac{11}{2}}$)

4.18. Wyznacz wyrażenia A i B, wiedząc, że $2A - 3B = 9x - 4$ i $4A + B = 11x + 6$.

(ODP. A = 3x + 1, B = –x + 2)

4.19. Rozwiąż równanie $(x^2 - 4x)\cdot(x^2 + 4x) = 0$. **(ODP. x∈{0,4,–4})**

4.20. Po dwukrotnej obniżce ceny towaru, za każdym razem o tyle samo procent, jego cena końcowa stanowi 64% ceny początkowej. O ile procent dokonywano każdorazowo obniżki ceny towaru? **(ODP. o 20%.)**

4.21. Suma cyfr pewnej liczby dwucyfrowej jest równa 16. Jeżeli od tej liczby odejmiemy liczbę powstałą z przestawienia jej cyfr to otrzymamy liczbę równą 9. Co to za liczba? **(ODP. 97)**

4.22. Suma cyfr pewnej liczby trzycyfrowej wynosi 10. Jeżeli przestawimy pierwszą cyfrę z ostatnią to otrzymamy liczbę o 297 większą od liczby początkowej. Jaka to liczba? **(ODP. 235)**

4.23. Wyznacz wartość m tak, aby liczba 3 była pierwiastkiem równania: 2x3 – mx2+ (m – 8)x + m = 0 **(ODP. m=6)**

4.24. Funkcja f dowolnej liczbie całkowitej k przyporządkowuje ostatnią cyfrę czwartej potęgi liczby k. Wyznacz zbiór wartości tej funkcji. **(ODP. zw: y∈{0,1,5,6})**

4.25. Podaj wzór funkcji liniowej, której wykres przechodzi przez punkt A(1, 3) i która przyjmuje wartości ujemne tylko wtedy, gdy x > 2. Czy istnieje tylko jedna taka funkcja? (**ODP. y = – 3x + 6, tak**)

4.26. Oblicz miejsce zerowe funkcji $f(x)=\frac{x(x-4)}{16-x^2}$. **(ODP. 0)**

4.27. Wyznacz równanie prostej prostopadłej do prostej 2x+3y-4=0 przechodzącej przez punkt P(2,-1). **(ODP. $y=\frac{3}{2}x-4$)**

4.28. Wyznacz zbiór wartości funkcji $\mathrm{f(x)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{x}} - 3$. **ODP $(-\mathbf{3}, \infty)$**

4.29. Wyznacz przedział, w którym funkcja $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2 - 6\mathrm{x} + 2$ jest rosnąca **(ODP. $\langle \mathbf{3}, \infty)$)**

4.30. Funkcja kwadratowa $f(x) = ax^2 + bx + 2$, gdzie $a \neq 0$, przyjmuje wartość (-1) dla argumentu 1. Jednym z jej miejsc zerowych jest liczba $\frac{1}{2}$.

a) Wyznacz wzór tej funkcji.

b) Oblicz drugie miejsce zerowe tej funkcji.

c) Dla znalezionych wartości a oraz b rozwiąż nierówność: $8 - 5x \geq f(x)$.

(ODP. a) $f(x) = 2x^2 - 5x + 2$, b) $x = 2$, c) $x \in \langle -\sqrt{3}, \sqrt{3} \rangle$)

4.31. Funkcja kwadratowa f(x) = 3x2 + bx + c ma dwa miejsca zerowe: x1 = – 2 oraz x2 = 1. Wyznacz wartości współczynników b oraz c, a następnie oblicz, dla jakiego argumentu funkcja osiąga wartość równą (–6).

(ODP. a) b = 3, c = – 6; b) dla x = 0 oraz x = – 1)

4.32. Sprawdź, czy liczba $\mathrm{a} = \log_{0,2} 25$ jest rozwiązaniem równania: $\mathrm{x}^2 - 3\mathrm{x} - 10 = 0$

(ODP. $\boldsymbol{a} = -\mathbf{2}$, jest)

Naszkicuj wykres funkcji $\mathrm{f(x)} = 3^{\mathrm{x}+2} - 3^{\mathrm{x}+3} + 21 \cdot 3^{\mathrm{x}}$ przekształcając wykres funkcji $\mathrm{h(x)} = 3^{\mathrm{x}}$. **(ODP. Należy narysować wykres funkcji $\boldsymbol{f(x)} = \mathbf{3}^{\boldsymbol{x}+\mathbf{1}}$)**

4.33. Ciąg arytmetyczny (an) określony jest wzorem an = 2n – 6. Zsumowano 10 kolejnych wyrazów tego ciągu, trzymując liczbę 290. Które wyrazy zsumowano?

(ODP. od a_{13} do a_{22})

4.34. Które wyrazy ciągu $a_n = -2n + 5$ są ujemne? **(ODP. a_3, a_4, a_5 , …..)**

4.35. Uzasadnij, że liczby $1 + \log_2 24$, $2 + 2\log_2 6$, $4 + 3\log_2 3$ tworzą ciąg arytmetyczny.

Oblicz sumę wszystkich dwucyfrowych liczb naturalnych niepodzielnych przez 3. **(ODP. 3240)**

4.36. Dany jest ciąg określony wzorem $a_n = n^2 + 2n - 63$. Które wyrazy ciągu a_n są nie mniejsze niż 57. **(ODP. $\boldsymbol{a_{10}, a_{11}, a_{12}}$ …)**

4.37. Pierwszy wyraz ciągu geometrycznego jest równy 128, a ostatni 972. Wiedząc, że suma wyrazów tego ciągu wynosi 2660, oblicz:

a) iloraz ciągu;
b) liczbę wyrazów tego ciągu.

(ODP. a) q = $\frac{3}{2}$; b) 6)

4.38. Oblicz wartość wyrażenia sinαcosβ + cosαsinβ +tgαtgβ wiedząc, że α i β są kątami ostrymi trójkąta prostokątnego. **(ODP. 2)**

4.39. W trójkącie prostokątnym przeciwprostokątna ma długość 15 cm, a jedna z przyprostokątnych 9 cm. Oblicz tangens większego kąta ostrego tego trójkąta. **(ODP. $\frac{4}{3}$)**

4.40. Sinus jednego z kątów ostrych trójkąta prostokątnego jest równy $\frac{1}{3}$. Wyznacz długości pozostałych boków tego trójkąta, jeśli dłuższa przyprostokątna jest równa $2\sqrt{2}$. **(ODP. 1 i 3)**

4.41. W trójkącie prostokątnym ABC, $|\angle C| = 90°$. Odcinek CD, taki, że $D \in AB$, dzieli ten trójkąt na dwa trójkąty równoramienne: ΔADC ($|AC| = |CD|$) i ΔCDB ($|CD| = |DB|$). Oblicz miary kątów ostrych trójkąta ABC. **(ODP. 30°, 60°)**

4.42. W pewnym wielokącie foremnym kąt wewnętrzny ma miarę 140°.

a) Ile boków ma wielokąt?
b) Ile przekątnych ma ten wielokąt?
(ODP. a) 9; b) 27)

4.43. Oblicz długości boków trójkąta prostokątnego, którego przeciwprostokątna ma długość 15 , a tangens kąta ostrego wynosi $2\sqrt{2}$. **ODP. $10\sqrt{2}$, 5**

4.44. Oblicz promień okręgu opisanego na trójkącie prostokątnym, którego przyprostokątne mają długość 5 i 12. **(ODP 7,5)**

4.45. Oblicz pole trójkąta równoramiennego, jeżeli kąty przy podstawie mają miarę 75^0, a jego ramiona mają długość $7\sqrt{5}$. **(ODP. 61,55)**

4.46. W okręgu o promieniu 8 cm poprowadzono cięciwę oddaloną od jego środka o 4 cm. Oblicz długość tej cięciwy. **(ODP. $8\sqrt{3}$)**

4.47. Dany jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych 9 i 12.Oblicz długość środkowej tego prostokąta poprowadzonej z wierzchołka kąta prostego. **(ODP. 7,5)**

4.48. Oblicz pole pięciokąta ABCDE o wierzchołkach A(–5, –2), B(4,–4), C(8,2), D(1,7), E(–4,5). **(ODP. 94)**

4.49. Drewnianą belkę w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 7cm i wysokości 56 cm rozcięto na elementy, z których można zbudować pełny model sześcianu. Oblicz długość jego krawędzi. **(ODP. 14)**

4.50. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym ściana boczna tworzy z podstawą kąt 60^0 , a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni i objętość ostrosłupa. **ODP. $P = 27\sqrt{3}$, $V = 9\sqrt{3}$**

4.51. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym odległość środka podstawy od ściany bocznej jest równa 6 cm, a kąt nachylenia ściany bocznej do płaszczyzny podstawy ma miarę 60°. Oblicz:

a) objętość ostrosłupa;
b) pole powierzchni bocznej ostrosłupa;
(ODP. a) 768 cm^3; b) 384 cm^2)

4.52. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole podstawy wynosi 49 $\sqrt{3}$ cm2, a przekątna ściany bocznej tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt o mierze 45°. Oblicz objętość graniastosłupa.

(ODP. $343\sqrt{6}$ cm^3)

4.53. Ile jest liczb pięciocyfrowych parzystych o różnych cyfrach, w zapisie których użyto cyfr 0, 1, 2, 3, 4? **(ODP. 60)**

4.54. W tabeli przedstawiono wyniki sprawdzianu z matematyki w klasie trzeciej.

Ocena	6	5	4	3	2	1
Liczba ocen	1	3	4	6	9	3

Oblicz prawdopodobieństwo, że losowo wybrany uczeń tej klasy otrzymał ze sprawdzianu ocenę wyższą od średniej ocen w klasie. **(ODP. $\mathbf{P(A)} = \frac{7}{13}$)**

4.55. Aby otrzymać od rodziców pieniądze na koncert ulubionego zespołu Bartek musiał odgadnąć jaka kwota znajduje się obecnie w portfelu taty. Miał tylko jedną szansę, ale otrzymał następujące wskazówki: w portfelu znajdują się wyłącznie banknoty 100 zł i 50 zł, przy czym ilość banknotów 100 zł jest o 4 większa od liczby banknotów 50 zł, a prawdopodobieństwo wylosowania banknotu stuzłotowego wynosi $\frac{3}{4}$. Jaka kwota znajduje się w portfelu taty? **(ODP. 700 zł)**

PRZYKŁADOWY ARKUSZ MATURALNY. ZAKRES ROZSZERZONY.

Zadanie 1. (0-1)

Wartość wyrażenia $3^{log_5 13} - 13^{log_5 3}$ jest równa

$A. -1$ B. 0 $C. 3$ D. 10

Zadanie 2. (0-1)

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny o wyrazach dodatnich taki, że $a_1 = \frac{3}{4}$ i $a_3 = \frac{1}{3}$. Suma wszystkich wyrazów tego ciągu jest równa

$A. \frac{9}{4}$ B. $\frac{13}{12}$ $C. -\frac{4}{9}$ D. -1

Zadanie 3. (0-1)

Punkt P(-3,-6) jest obrazem punktu Q(2,4) w jednokładności o skali $k = -\frac{2}{3}$. Współrzędne punktu będącego środkiem jednokładności to:

$A. (-1, -2)$ B. $(0, 0)$ $C. (1, 2)$ D. $(-1, -3)$

Zadanie 4. (0-1)

Dana jest funkcja $f(x) = \frac{2x^4+15}{6-x^2}$. Wartość pochodnej tej funkcji w punkcie $x = 1$ wynosi

$A. \frac{19}{12}$ B. $\frac{17}{5}$ $C.\ \frac{17}{7}$ D. $\frac{74}{25}$

Zadanie 5. (0-1)

Prosta o równaniu $y = -2x + 10$ tworzy z osią OX kąt β. Zatem $sin2\beta$ ma wartość:

$A. -\frac{2}{5}$ B. $-\frac{1}{4}$ $C. -\frac{4}{5}$ D. $-\frac{1}{2}$

Zadanie 6. (0-2)

Oblicz największą wartość funkcji $f(x) = -sinx + cos^2x$. Zakoduj cyfrę jedności i dwie pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

(odp. 125)

Projekt SZKOŁA JUTRA realizowany w IV Liceum Ogólnokształcącym w Białymstoku jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podlaskiego na lata 2014-2020

Zadanie 7. (0-2)

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w przestrzeni Ω takimi, że $P(B) = P(B')$ i $P(A|B) + P(A|B') = \frac{3}{5}$. Oblicz $P(A)$. Zakoduj trzy pierwsze cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

(Odp. 300)

Zadanie 8. (0-2)

Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami równania $x^2 + 48x + 2 = 0$. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2}$.

Zakoduj cyfrę jedności i dwie cyfry po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

(ODP 116)

Zadanie 9. (0-3)

Wiedząc, że $k + m = 4$ i $k^3 + m^3 = 14$ oblicz $k{\cdot}m$. **(ODP.$\frac{10}{3}$)**

Zadanie 10. (0-3)

Wykaż, że dla $a > 0$ i $b > 0$ oraz $a + b = 1$ to $ab \leq \frac{1}{4}$.

Zadanie 11. (0-3)

Rozwiąż nierówność: $sin3x \geq \frac{1}{2}$, jeżeli $x\epsilon < 0, \frac{\pi}{2} >$. **ODP $\left(\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}\right)$**

Zadanie 12. (0-5)

Wyznacz dziedzinę funkcji $f(x) = \frac{\log(15-3x)+\sqrt{3}}{log_{5x+1}(3x+2)-1} + 5\sqrt{3 - log_2(x+4)}$

ODP. $x\epsilon\left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, 4\right\rangle$

Zadanie 13. (0-3)

W nieskończonym ciągu geometrycznym (a_n) dane są $a_1 = p + 2$ i $a_2 = \frac{p^2+2p}{p-1}$. Dla jakich wartości parametru p szereg $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ jest zbieżny. **ODP. $p\epsilon\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$**

Zadanie 14. (0-4)

Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = cos2x + 4sin^2x + 2cosx + 9$ **ODP.** $< 8; \frac{25}{2} >$

Zadanie 15. (0-4)

Środkowe AK i BL trójkąta ABC przecinają się w punkcie N. Wierzchołek C leży na okręgu przechodzącym przez punkty K, L, N.

a) Wykaż, że $|\angle KAB| = |\angle ACN|$ i $|\angle ABL| = |\angle BCN|$.

b) Oblicz długość środkowej CM, wiedząc, że $|AB| = a$. **(ODP.** $|CM| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$**)**

Zadanie 16. (0-4)

Wyznacz wszystkie wartości parametru a, dla których prosta o równaniu $y = ax - 5$ nie ma punktów wspólnych z okręgiem o środku w punkcie $S = (0,0)$ i promieniu $r = 3$.

ODP. $a \in \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$

Zadanie 17. (0-4)

W punktach o odciętych x1 = 3 i x2 = – 3 poprowadzono styczne do wykresu funkcji $f(x) = \frac{1+2x^2}{x^2+5}$.

Oblicz współrzędne punktu przecięcia się tych stycznych.

(ODP. styczne: $y = \frac{27}{98}x + \frac{26}{49}$ **i** $y = -\frac{27}{98}x + \frac{26}{49}$, **punkt przecięcia** $\left(0; \frac{26}{49}\right)$

Zadanie 18. (0-3)

Rozpatrujemy liczby ośmiocyfrowe. Oblicz prawdopodobieństwo, że otrzymamy liczby , w których zapisie dwójka występuje 3 razy, cyfrą jedności jest 7, a wszystkie pozostałe cyfry są różne i są inne niż wymienione. **ODP.** $\frac{91}{150000}$

Zadanie 19. (0-3)

W kulę wpisano dwa stożki o wspólnej podstawie, z których jeden ma trzy razy większe pole powierzchni bocznej niż drugi. Oblicz stosunek objętości kuli do sumy objętości stożków. $\left(\text{ODP. } \frac{50}{9}\right)$

5. JESZCZE KILKA ĆWICZEŃ NA ZAKOŃCZENIE. ZAKRES ROZSZERZONY.

5.1. Oblicz $\log_{ab} a^3 b^4$, jeżeli $\log_b a = 7$.

ODP. $\mathbf{\frac{25}{8}}$

5.2. Rozwiąż równanie $3^x + 3^{x-1} + 3^{x-2} \ldots = \frac{1}{2}\sqrt{10 \cdot 3^{x+1} - 9}$

ODP. $\mathbf{x \in \{-1, 1\}}$

5.3. Rozwiąż graficznie i algebraicznie układ $\begin{cases} |y+2| - x = 4 \\ 3x - y = -6 \end{cases}$

ODP. $\mathbf{(-3, -3), (-2, 0),}$

5.4. Wykaż, że jeśli $x \in (-2\,;\,4)$, to $\frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x+2} - |x-4| - x + 7 = 4$

5.5. Uzasadnij, że liczba $\sqrt{11 + 6\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ jest liczbą naturalną

5.6. Wykaż, że liczba $\sqrt[3]{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt[3]{9 - 4\sqrt{5}}$ jest naturalna

 Projekt SZKOŁA JUTRA realizowany w IV Liceum Ogólnokształcącym w Białymstoku jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podlaskiego na lata 2014-2020

5.7. Wykaż, że liczby $\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}+\sqrt{3}-\sqrt{2}$ i $\frac{3}{\sqrt{3}-\sqrt{6}}$ są liczbami przeciwnymi.

5.8. Uporządkuj rosnąco liczby: $a = log_5 7 \cdot log_7 65 - log_5 13$, $b = log_{\frac{1}{3}} 27\sqrt[3]{9}$,

$c = 2^{log_4 25-1}$, $d = \frac{1}{2} log_3 2 + log_3 2\sqrt{2}$.

ODP. $\mathbf{b} < a < d < c$

5.9. Dla jakiej wartości parametru m równanie $|x^2 - 3|x| + 2| = m$ ma dwa rozwiązania?

ODP. $\mathbf{m \in (2, \infty)}$

5.10. Wykaż, że jeśli ciąg an jest ciągiem arytmetycznym, to ciąg $b_n = \left(\sqrt{2}\right)^{3a_{n+1}}$ jest ciągiem geometrycznym.

5.11. Nieskończony ciąg liczbowy określony jest wzorem $a_n = 3n - 5$, $n \in N_+$. Wyrazy a_k, a_{k+1}, a_{k+2} danego ciągu, wzięte w takiej kolejności powiększono: wyraz a_k o 1, wyraz a_{k+1} o 4, zaś wyraz a_{k+2} o 25. W ten sposób otrzymano trzy pierwsze wyrazy pewnego ciągu geometrycznego. Wyznacz k oraz piąty wyraz ciągu geometrycznego.

ODP. $\mathbf{k = -2}$, $\mathbf{a_5 = 512}$

5.12. Dla jakich wartości parametru m równanie $m(mx - 3) - 4x = -6$ jest sprzeczne?

ODP. $\boldsymbol{m = -2}$

5.13. Wyznacz wartości parametrów $a\ i\ b$, dla których styczna do wykresu funkcji $f(x) = \frac{2}{3}x^3 + ax^2 + bx - \frac{3}{8}$ w punkcie $P(\frac{3}{2}, -3)$ jest równoległa do prostej $x + y = 7$.

(ODP $\boldsymbol{a = -1,5}$ $\boldsymbol{b = -1}$**)**

5.14. Dla jakich wartości parametru m okręgi $(x - m)^2 + y^2 = m^2$ oraz $(x - m)^2 + (y - 3)^2 = 1$ mają dokładnie jeden punkt wspólny?

ODP. $\mathbf{m \in \{-4, -2, 2, 4\}}$

5.15. Dla jakich wartości parametru m równanie $x^4+2(m-2)x^2+m^2-1=0$ ma dwa różne pierwiastki?

ODP. $\mathbf{m\epsilon(-1,1)\cup\left\{\frac{5}{4}\right\}}$

5.16. Pierwiastkami równania $x^2 - 2px + p = 0$ są dwie różne liczby x_1, x_2. Stosując wzory Viete'a zbadaj, czy istnieje taka wartość parametru p, dla której $(x_1 + 5x_2)(x_2 + 5x_1)$ osiąga wartość 13.

ODP. $\mathbf{p\epsilon\left\{\frac{1}{2},-\frac{13}{10}\right\}}$

5.17. Narysuj wykres funkcji $\mathrm{f(x)=-x^2+3x-2}$ a następnie wykres funkcji $\mathrm{g(x)=f(|x|)}$. Wyznacz najmniejszą i największą wartość funkcji $\mathrm{y=g(x)}$ w przedziale $\langle-3,1\rangle$.

ODP. $\mathbf{M=\frac{1}{4},\qquad m=-2}$

5.18. Dane są zbiory A i B . Wyznacz $\mathrm{A\cap B}$ jeżeli:

$A=\left\{x\in\mathbb{R}\colon \frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\geq\frac{3}{x}\right\}$ oraz $B=\left\{x\in\mathbb{R}\colon \frac{2}{x}\geq 2\right\}$

ODP. $\mathbf{A=(-\infty,-\sqrt{3}\rangle\cup(-1,0)\cup(1,\sqrt{3}\rangle\qquad B=\langle 0,1\rangle\qquad A\cap B=\emptyset}$

5.19. Dana jest funkcja o wzorze $\mathrm{f(x)=|1-5m|x+8}$, $\mathrm{x\in\mathbb{R}}$.

a) Dla m = 0,25 wyznacz zbiór tych argumentów , dla których funkcja przyjmuje wartości należące do zbioru A = ⟨–2, 5⟩.

ODP. $\mathbf{x\epsilon\langle-40,-12\rangle}$

b) Wyznacz m tak, aby kąt nachylenia wykresu funkcji do osi OX wynosił $\alpha=\frac{3\pi}{4}$

ODP. $\mathbf{m\epsilon\emptyset}$

c) Dla jakich m wykres funkcji f jest prostopadły do wykresu funkcji $g(x) = -0{,}375x - 3$?

ODP. $\mathbf{m\epsilon\left\{-\frac{1}{3},\frac{11}{15}\right\}}$

5.20. Dla jakich wartości parametru m funkcja $f(x) = \frac{m-2}{5}x^5 - \frac{2(m+3)}{3}x^3 + (m+1)x$ nie ma ekstremów?

$\mathbf{ODP.\ m \epsilon (-\infty, -1)}$

5.21. Dane są punkty $A = (-2,3)$, $B = (1,4)$, $C = (0,1)$, $D = (3,-5)$.

a) Wyznacz współrzędne i długość wektora $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$

$\mathbf{ODP.\ \vec{u} = [5,4] \quad |\vec{u}| = \sqrt{41}}$

b) Dla jakich wartości parametru k wektor $\vec{u}$ jest równoległy do wektora $\vec{v} = [2k, k+3]$?

$\mathbf{ODP.\ k = 5}$

5.22. W dany okrąg wpisano trójkąt ABC, którego kąty mają odpowiednio miary 48°, 54°, 78°. W punktach A, B, C poprowadzono styczne do okręgu. Oblicz miary kątów powstałego trójkąta $A_1B_1C_1$.

$\mathbf{ODP.\ |\measuredangle A_1| = 72^0, \quad |\measuredangle B_1| = 24^0, \quad |\measuredangle C_1| = 84^0,}$

5.23. Dane są punkty A = (1, -1); B = (3, 3) oraz prosta k: y = x + 3. Wyznacz na prostej k taki punkt C, by pole trójkąta ABC było równe 6.

$\mathbf{ODP.\ C_1(12, 15), \quad C_2 = (0, 3)}$

5.24. Bok rombu ma długość 10 cm, a dłuższa przekątna 16 cm. Środki kolejnych boków rombu połączono odcinkami. Oblicz długość drugiej przekątnej rombu. Oblicz obwód i miary kątów otrzymanego czworokąta.

$\mathbf{ODP.\ d_2 = 12, \quad Ob = 28,}$ **Kąty proste.**

5.25. Oblicz miary kątów równoległoboku, którego boki mają długość 6 cm i 15 cm, a pole jest równe $45\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$

$\mathbf{ODP.\ 60^0, 120^0}$

5.26. Odcinek CD przekształcono w pewnej jednokładności o skali dodatniej i otrzymano odcinek AB. Wiedząc , że A=(1,2) B=(4,-1) C=(3,-5) D=(-3,1) oblicz współrzędne środka jednokładności i skalę k.

$\mathbf{ODP.\ S = (5,3), skala\ k = \frac{1}{2}}$

5.27. Dla pewnego wielokąta foremnego stosunek sumy miar kątów wewnętrznych do sumy miar kątów zewnętrznych jest równy 2. Oblicz:

a) miarę kąta wewnętrznego i miarę kąta zewnętrznego wielokąta

$\mathbf{ODP.\ wew = 120^0,\ \ zewn = 60^0}$

b) liczbę przekątnych tego wielokąta.

$\mathbf{ODP.\ 9}$

5.28. Napisz równanie okręgu symetrycznego do okręgu o równaniu $x^2 + y^2 - 4x = 0$ względem prostej k o równaniu $y = -2x + 9$.

$\mathbf{ODP.\ (x-6)^2 + (y-2)^2 = 4}$

5.29. Punkty L=(2,1), M=(2,4), N=(0,5) są kolejnymi wierzchołkami trapezu KLMN o podstawach KL i MN. Wiedząc, że |KL|=3|MN| oblicz:

a) współrzędne wierzchołka K

$\mathbf{ODP.\ K = (-4,4)}$

b) sinus kąta NKL.

$\mathbf{ODP.\ \sin\measuredangle NKL = \frac{6\sqrt{85}}{85}}$

Projekt SZKOŁA JUTRA realizowany w IV Liceum Ogólnokształcącym w Białymstoku jest współfinansowany ze środków Europejskiego Funduszu Społecznego w ramach Regionalnego Programu Operacyjnego Województwa Podlaskiego na lata 2014-2020

5.30. W trójkącie ABC bok AC ma 5 cm długości, a miara kąta przy wierzchołku A jest równa $60°$. Wiedząc, że promień okręgu opisanego na tym trójkącie ma długość $\frac{7\sqrt{3}}{3}$ cm, oblicz długości pozostałych boków trójkąta ABC.

ODP. $|\mathbf{AB}| = \mathbf{8}, \ \ |\mathbf{CB}| = \mathbf{7}$

5.31. Bok trójkąta równobocznego ABC ma długość 8. Na boku AB wybrano taki punkt D tak, że BD = 2. Oblicz tangens kąta ACD.

ODP. $\frac{3\sqrt{3}}{5}$

5.32. Rozwiąż równania:

a) $2\sin^2 x + 3\cos x - 3 = 0$

ODP. $\mathbf{x = 2k\pi \ \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \qquad k\epsilon C}$

b) $sinx + \sqrt{3}cosx = 1$

ODP. $\mathbf{x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ \ \vee \ x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \ k\epsilon C}$

5.33. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin 10^\circ \cos 20^\circ + \cos 10^\circ \sin 20^\circ}{\cos 19^\circ \cos 11^\circ - \sin 19^\circ \sin 11^\circ}$.

ODP. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

5.34. Naszkicuj wykres funkcji $f(x) = |sin2x| - sin2x$, dla $x \in < 0; 2\pi >$. Odczytaj z wykresu przedziały, w których funkcja jest rosnąca.

ODP. Funkcja rośnie w przedziałach: $\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{4}\pi \rangle, \langle \frac{3}{2}\pi, \frac{7}{4}\pi \rangle$

5.35. Wyznacz zbiór wartości funkcji $f(x) = -\cos 2x + 2\cos x$, $x \in R$.

$\mathbf{ODP.\ zw = \langle -3, \frac{3}{2} \rangle}$

5.36. Oblicz objętość kuli wpisanej w stożek o promieniu r i kącie rozwarcia 2α.

$\mathbf{ODP.\ \ V = \frac{4}{3}\pi \cdot \left(\frac{r \cdot \cos\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^3}$

5.37. W ostrosłupie, którego podstawą jest trójkąt równoramienny o bokach długości 5, 5 i 8. Wszystkie ściany boczne są nachylone do płaszczyzny podstawy pod tym samym kątem o mierze 600 . Oblicz objętość bryły.

$\mathbf{ODP.\ V = \frac{16\sqrt{3}}{3}}$

5.38. Kąt dwuścienny między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 120°. Wyznacz sinus kąta ściany bocznej ostrosłupa przy podstawie.

$\mathbf{ODP.\ \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2 + \sqrt{3}}}}$

5.39. W stożek o wysokości 20cm wpisano walec w ten sposób, że dolna podstawa walca zawiera się w podstawie stożka, a okrąg górnej podstawy walca zawiera się w powierzchni bocznej stożka. Stosunek długości wysokości walca do jego promienia jest równy 4:3, a pole powierzchni bocznej walca wynosi $96\pi\ cm^2$. Oblicz:

a) długość wysokości i promienia walca, **ODP.** $\mathbf{r = 6, h = 8}$

b) objętość stożka, **ODP.** $\mathbf{V = \frac{2000\pi}{3}}$

c) cosinus kąta rozwarcia stożka **ODP.** $\mathbf{\cos\alpha = \frac{3}{5}}$

5.40. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym pole powierzchni bocznej jest równe sumie pól obu podstaw. Oblicz sinus kąta nachylenia przekątnej ściany bocznej do sąsiedniej ściany bocznej.

ODP. $\mathbf{\sin\alpha = \frac{3\sqrt{13}}{13}}$

5.41. W urnie znajduje się N kul, z których 3 są czarne. Jaka musi być liczba kul w urnie, aby prawdopodobieństwo wylosowania bez zwracania 2 kul czarnych było nie mniejsze od $\frac{1}{4}$?

ODP. $\mathbf{N \in \{3, 4, 5\}}$

RECENZJE

Zbiór zadań „Dobrego nigdy nie za wiele” to wyjątkowa praca zbiorowa nauczycieli matematyki z IV Liceum Ogólnokształcącego w Białymstoku, która zawiera opracowanie wielu ciekawych zadań pomocnych w rozwijaniu zainteresowań matematycznych uczniów oraz właściwym przygotowaniu do egzaminu maturalnego.

Poprzez oryginalne pokazanie różnorodności zastosowań wzorów skróconego mnożenia w rozdziale I, bogactwo przykładów związanych z rozwiązywaniem równań i nierówności w rozdziale II, praktyczne zastosowanie wcześniej nabytych umiejętności w rozdziale III zatytułowanym „Z życia wzięte” oraz szereg ciekawych ćwiczeń w kolejnych rozdziałach autorzy stawiając uczniowi coraz trudniejsze matematyczne wyzwania z powodzeniem przeprowadzają go od zakresu podstawowego do rozszerzonego.

Publikacja bawi i uczy poprzez rozwiązywanie wielu problemów algorytmicznych i kombinatorycznych, a brak gotowych rozwiązań rozwija umiejętności samodzielnego myślenia uczniów.

Każdy znajdzie tu odpowiednie zadania do swego poziomu wiedzy i umiejętności matematycznych. Autorzy opracowali również przykładowy arkusz maturalny, który pomoże uczniom lepiej przygotować się do egzaminu dojrzałości.

Ten zbiór zadań to bardzo dobry przykład na zaangażowanie całej społeczności szkolnej do wspólnych działań rozwijających umiejętności matematyczne uczniów.

Fragment recenzji Wiesława Półjanowicza

Zbiór zadań „Dobrego nigdy za wiele” to publikacja, która pomoże uczniom przygotować się do egzaminu maturalnego. W jasny, precyzyjny i spójny sposób prowadzi ucznia przez treści matematyczne. Umożliwia samodzielną pracę.

Zawiera wszystkie typy zadań maturalnych, przykłady wymagające rozumienia treści matematycznych, a nie tylko zastosowania gotowych wzorów i schematów rozwiązań. Jest to dobra lektura dla uczniów lubiących matematykę, stawia przed nimi wyzwania.

Zbiór może być też użytecznym narzędziem w pracy nauczyciela. Dostarcza materiału do powtórek, ze względu na różny stopień trudności zadań jest doskonałym materiałem do indywidualizacji pracy na lekcjach.

Fragment recenzji Joanny Wasilewskiej