



Wprowadzenie do programu

GeoGebra

Wersja 4.2



## Wprowadzenie do programu GeoGebra

Data ostatniej modyfikacji: **6 Listopada, 2012.**

Aktualizacja dotyczy najnowszej wersji programu: GeoGebra 4.2.

Podręcznik zawiera podstawy wprowadzające do dynamicznego oprogramowania matematycznego GeoGebra i może być wykorzystany zarówno na lekcjach jak i do samodzielnej nauki.

### Autorzy

Judith Hohenwarter, [judith@geogebra.org](mailto:judith@geogebra.org)

Markus Hohenwarter, [markus@geogebra.org](mailto:markus@geogebra.org)

przy wsparciu wielu osób zespołu programu GeoGebra.

Tłumaczenie: Barbara Kot

Korekta: Maria Binkowska

## Licencja / Prawo autorskie

Opracowanie podlega licencji:

Uznanie autorstwa - Użycie niekomercyjne - Na tych samych warunkach.

Szczegóły można przeczytać na stronie:

<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/>

Licencja daje użytkownikowi prawo do:

- **dzielenia się niniejszym opracowaniem z innymi** – kopiowania, rozpowszechniania, odtwarzania i wykorzystywania;
- **tworzenia opracowania zależnego** – w celu dostosowywania oryginału do własnych potrzeb.

Warunkiem korzystania z licencji jest:

- **Uznanie autorstwa** Użytkownik zobowiązany jest do zamieszczenia informacji o autorach oryginału oraz załączenia odnośnika do strony [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org) (ale w żadnym razie nie wolno użytkownikowi sugerować, że autorzy rekomendują lub polecają sposób modyfikacji oryginału przez użytkownika).
- **Użycie niekomercyjne** Nie wolno używać tego opracowania do celów komercyjnych.
- **Na podobnych warunkach** Jeśli użytkownik zmodyfikuje niniejsze opracowanie to nowy produkt musi być udostępniony w zgodności z tą samą lub podobną licencją.

## Podziękowania

Opracowanie to było wsparte niżej wymienionymi grantami. Wszelkie opinie, odkrycia, wnioski i zalecenia wyrażone w tym materiale pochodzą od autorów i niekoniecznie odzwierciedlają opinie organizacji wspierających.



- 2010-2012: Grant krajiny Górnej Austrii "GeoGebra dla Szkół":  
State of Upper Austria "GeoGebra for Schools" Grant, Johannes Kepler University, Linz, Austria
- 2006-2008: Grant Narodowej Fundacji Nauki w USA.  
*National Science Foundation*: Grant No. EHR-0412342, NSF Math and Science Partnership "Standards Mapped Graduate Education and Mentoring". ", Florida Atlantic University, Boca Raton, USA

## Jak Korzystać z Tej Książki

We „Wprowadzeniu do programu GeoGebra” opisano podstawowe elementy oprogramowania dynamicznego, jakim jest GeoGebra. Książka ta może z jednej strony służyć jako przewodnik dla prowadzącego warsztaty poświęcone GeoGebra, a z drugiej strony można ją wykorzystać do samodzielnej nauki.

– Książka ta ma ambicje pokazania, w jaki sposób można posługiwać się programem GeoGebra zarówno w nauczaniu matematyki, jak i w trakcie samodzielnego uczenia się. Program ten można wykorzystywać począwszy od 4 klasy szkoły podstawowej, poprzez szkołę średnią, aż na nauczaniu elementów matematyki wyższej skończywszy. Książka zawiera zestaw ćwiczeń, który służy do opanowania umiejętności posługiwania się narzędziami geometrycznymi, wprowadzania wyrażeń algebraicznych i poleceń oraz wykorzystania różnych opcji programu. Omówienie różnorodnych tematów z dziedziny matematyki, ma na celu pokazanie wielofunkcyjności programu i zachęcenie do stosowania metod integrujących tradycyjne nauczanie z posługiwaniem się GeoGebra.

Podręcznik zawiera także dodatkowe bloki ćwiczeniowe. Pozwalają one przetrenować nowo nabyte umiejętności przed przystąpieniem do samodzielnej pracy z programem.

Wszystkie pliki wraz z konstrukcjami omawianymi w tej książce, jak również pliki powiązane (dodatkowe pliki GeoGebry, dynamiczne arkusze, pliki graficzne) dostępne są pod adresem <http://www.geogebra.org/book/intro-pl.zip>.

Życzymy dobrej zabawy i sukcesów w pracy z GeoGebra!  
Judith, Markus i Zespół programu GeoGebra.

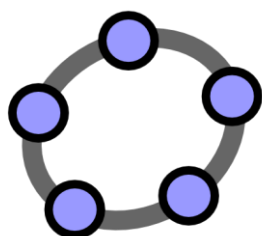


# Spis Treści

<b>1. WPROWADZENIE I INSTALACJA RYSOWANIE A TWORZENIE KONSTRUKCJI GEOMETRYCZNYCH.....</b>	<b>6</b>
1.1. WPROWADZENIE I INSTALACJA PROGRAMU GEOGEBRA.....	7
1.2. PODSTAWY POSŁUGIWANIA SIĘ PROGRAMEM GEOGEBRA.....	10
1.3. TWORZENIE RYSUNKU W GEOGEBRZE .....	11
1.4. RYSUNKI, KONSTRUKCJE I TEST Z PRZECIĄGANIEM .....	13
1.5. KONSTRUKCJA PROSTOKĄTA.....	13
1.6. PASEK NAWIGACJI I PROTOKÓŁ KONSTRUKCJI .....	15
1.7. KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO.....	16
1.8. WŁAŚCIWOŚCI OBIEKTÓW W GEOGEBRZE.....	17
1.9. ZADANIE DNIA: KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA RÓWNOBOKIENNEGO.....	19
<b>2. KONSTRUKCJE GEOMETRYCZNE I STOSOWANIE POLECEŃ .....</b>	<b>20</b>
2.1. KONSTRUKCJA KWADRATU .....	21
2.2. KONSTRUKCJA SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO .....	22
2.3. KONSTRUKCJA OKRĘGU OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE.....	24
2.4. KĄT OPARTY NA ŚREDNICY .....	25
2.5. KONSTRUKCJA STYCZNYCH DO OKRĘGU.....	26
2.6. BADANIE PARAMETRÓW FUNKCJI KWADRATOWEJ.....	29
2.7. WYKORZYSTANIE SUWAKÓW DO ZMIANY PARAMETRÓW.....	30
2.8. ZADANIE DNIA: PARAMETRY WIELOMIANÓW .....	32
<b>3. WYRAŻENIA ALGEBRAICZNE, POLECENIA I FUNKCJE. EKSPORTOWANIE OBRAZKÓW DO PAMIĘCI .....</b>	<b>33</b>
3.1. PARAMETRY RÓWNAŃ FUNKCJI LINIOWEJ .....	34
3.2. BIBLIOTEKA FUNKCJI – WIZUALIZACJA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ .....	36
3.3. BIBLIOTEKA FUNKCJI – ZŁOŻENIE FAL .....	37
3.4. WPROWADZENIE DO POCHODNYCH – NACHYLENIE WYKRESU FUNKCJI .....	38
3.5. BADANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI WIELOMIANOWEJ.....	40
3.6. EKSPORTOWANIE OBRAZKÓW DO SCHOWKA PAMIĘCI .....	40
3.7. WKLEJANIE OBRAZKA DO DOKUMENTU EDYTORA TEKSTOWEGO.....	42
3.8. ZADANIE DNIA: TWORZENIE KARTY PRACY DLA UCZNIÓW .....	43
<b>4. PRZEKSZTAŁCENIA I WSTAWIANIE OBRAZKÓW DO WIDOKU GRAFIKI .....</b>	<b>45</b>
4.1. TWORZENIE GRY DOMINO Z WYKRESAMI FUNKCJI .....	46
4.2. TWORZENIE FIGUR DO GRY PAMIĘTACZEK .....	47
4.3. BADANIE SYMETRII W GEOGEBRZE .....	49
4.4. SKALOWANIE, ODBICIE SYMETRYCZNE I ZNIEKSZTAŁCENIE OBRAZKA .....	51
4.5. BADANIE WŁASNOŚCI SYMETRII OSIOWEJ .....	53
4.6. TRANSLACJA OBRAZKA .....	54
4.7. OBRACANIE WIEŁOKĄTÓW .....	55
4.8. ZADANIE DNIA: POKRYWANIE PŁASZCZYZNY WIEŁOKĄTAMI FOREMNymi - PARKIETAŻE .....	58
<b>5. WSTAWIANIE TEKSTU STATYCZNEGO I DYNAMICZNEGO DO WIDOKU GRAFIKI .....</b>	<b>61</b>
5.1. SYMETRIA OSIOWA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH.....	62
5.2. INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH .....	64
5.3. WIZUALIZACJA SUMY KĄTÓW W TRÓJKĄCIE .....	66



5.4. NOWE NARZĘDZIE .....	66
5.5. KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA NACHYLENIA.....	68
5.6. UŁAMKI DYNAMICZNE I PRZYPINANIE PÓL TEKSTOWYCH DO OBIEKTÓW .....	69
5.7. ZEGAR MODULO 3 .....	70
5.8. ZADANIE DNIA: WIZUALIZACJA ROZWINIĘCIA KWADRATU SUMY .....	73
<b>6. TWORZENIE I WZBOGACANIE ARKUSZY DYNAMICZNYCH Z GEOGEBRĄ .....</b>	<b>75</b>
6.1. WSTĘP: GEOGEBRATUBE I FORUM UŻYTKOWNIKA .....	76
6.2. SUMY DOLNA I GÓRNA .....	78
6.3. TWORZENIE ARKUSZY DYNAMICZNYCH.....	79
6.4. EKSPORT DYNAMICZNEJ KARTY PRACY .....	81
6.5. WIZUALIZACJA NIERÓWNOŚCI TRÓJKĄTA.....	84
6.6. VADEMECUM PROJEKTANTA ARKUSZY DYNAMICZNYCH .....	86
6.7. TWORZENIA PUZZLI 'TANGRAMU' .....	89
6.8. ZADANIE DNIA: ZMODYFIKUJ PUZZLE 'TANGRAMOWE' .....	90
<b>7. WŁASNE NARZĘDZIA I DOSTOSOWANIE PASKA NARZĘDZI .....</b>	<b>91</b>
7.1. TWIERDZENIE PITAGORASA .....	92
7.2. TWORZENIE WŁASNYCH NARZĘDZI .....	94
7.3. ZAPISYWANIE I IMPORTOWANIE NARZĘDZI UŻYTKOWNIKA .....	96
7.4. TWORZENIE NARZĘDZIA KWADRAT .....	97
7.5. SPIRALA FIBONACCIEGO .....	98
7.6. KONSTRUKCJA ŚRODKA OKRĘGU.....	99
7.7. DOSTOSOWANIE PASKA NARZĘDZI .....	101
7.8. ZADANIE DNIA: ODKRYCIE EULERA.....	102
<b>8. WIDOCZNOŚĆ WARUNKOWA I CIĄGI .....</b>	<b>105</b>
8.1. WIZUALIZACJA DODAWANIA LICZB CAŁKOWITYCH NA OSI .....	106
8.2. FORMATOWANIE WARUNKOWE – POLE WYBORU .....	110
8.3. TRÓJKĄT SIERPIŃSKIEGO.....	111
8.4. WIADOMOŚCI WSTĘPNE O POLECENIU CIĄG .....	113
8.5. WIZUALIZACJA MNOŻENIA LICZB NATURALNYCH .....	114
8.6. ZADANIE DNIA: KOMPOZYCJA STRUNOWA Z KRZYWYCH BÉZIERA.....	116
<b>9. WIDOK ARKUSZA KALKULACYJNEGO I PODSTAWOWE POJĘCIA STATYSTYCZNE.....</b>	<b>119</b>
9.1. WIDOK ARKUSZA W GEOGEBRZE - WPROWADZENIE .....	120
9.2. ZAPISYWANIE PUNKTÓW W ARKUSZU KALKULACYJNYM .....	121
9.3. KOPIOWANIE WZGLĘDNE I RÓWNANIA LINIOWE .....	123
9.4. BADANIE ZALEŻNOŚCI LICZBOWYCH .....	125
9.5. PUNKTY ROZRZUTU I LINIA TRENDU.....	129
9.6. ZADANIE DNIA: BADANIE POLECEŃ STATYSTYCZNYCH .....	131



# Wprowadzenie i Instalacja Rysowanie a Tworzenie Konstrukcji Geometrycznych

GeoGebra | Warsztaty | Część 1

## Spis Treści

1.1. <a href="#">WPROWADZENIE I INSTALACJA PROGRAMU GEOGEBRA</a> .....	7
1.2. <a href="#">PODSTAWY POSŁUGIWANIA SIĘ PROGRAMEM GEOGEBRA</a> .....	10
1.3. <a href="#">TWORZENIE RYSUNKU W GEOGEBRZE</a> .....	11
1.4. <a href="#">RYSUNKI, KONSTRUKCJE I TEST Z PRZECIAGANIEM</a> .....	13
1.5. <a href="#">KONSTRUKCJA PROSTOKĄTA</a> .....	13
1.6. <a href="#">PASEK NAWIGACJI I PROTOKÓŁ KONSTRUKCJI</a> .....	15
1.7. <a href="#">KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA RÓWNOBOCZNEGO</a> .....	16
1.8. <a href="#">WŁAŚCIWOŚCI OBIEKTÓW W GEOGEBRZE</a> .....	17
1.9. <a href="#">ZADANIE DNIA: KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA RÓWNORAMIENNEGO</a> .....	19



## Wprowadzenie i instalacja programu GeoGebra

### Podstawowe wiadomości o GeoGebrze

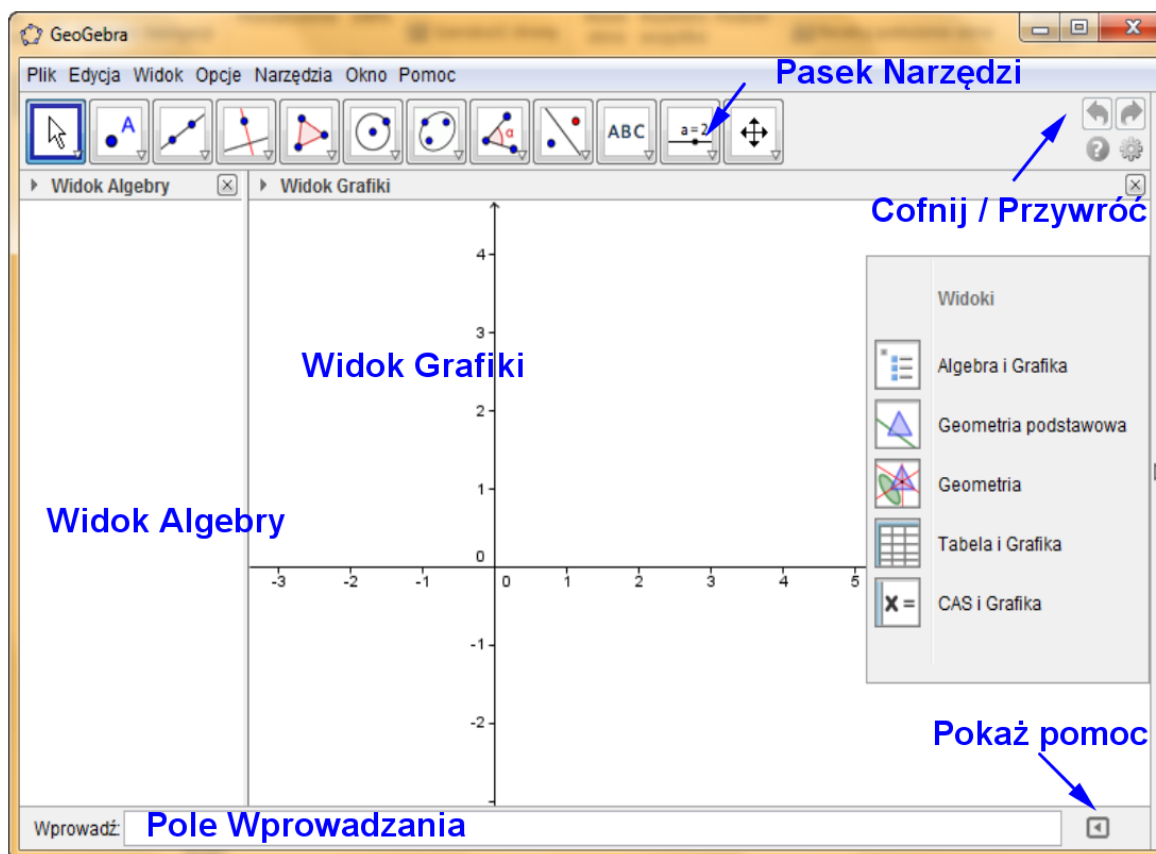
GeoGebra jest programem dynamicznym, który łączy geometrię, algebrę i analizę matematyczną.

GeoGebra jest interaktywnym systemem geometrycznym. Można w niej wykonywać konstrukcje posługując się punktami, wektorami, odcinkami, prostymi, krzywymi stożkowymi jak również wykresami funkcji, a w trakcie konstruowania, lub później wprowadzać zmiany dynamicznie.

Z drugiej strony w GeoGebrze można bezpośrednio wprowadzać współrzędne punktów, równania krzywych i wzory funkcji. Można posługiwać się zmiennymi liczbowymi, wektorowymi i punktowymi. Można wyznaczać pochodne i całki, miejsca zerowe (*Pierwiastki*)i ekstrema funkcji (*Ekstremum*).

### Interfejs programu GeoGebra

Po uruchomieniu GeoGebry pojawi się okno jak na obrazku poniżej:



Za pomocą przyrządów geometrycznych znajdujących się w *Pasku Narzędzi* można tworzyć konstrukcje w *Widoku Grafiki* za pomocą myszki. Jednocześnie w *Widoku*



*Algebry* wyświetlane są odpowiednie współrzędne lub równania wprowadzonych elementów.

W *Polu Wprowadzania* można z kolei wpisywać wyrażenia algebraiczne, polecenia i funkcje bezpośrednio z klawiatury. Podczas gdy graficzna reprezentacja wszystkich obiektów wyświetlana jest w *Widoku Grafiki*, ich reprezentacja algebraiczna i numeryczna widoczna jest w *Widoku Algebry*. Wszystkie zadania można w GeoGebrze rozwiązywać za pomocą narzędzi geometrycznych jak i algebraicznych.

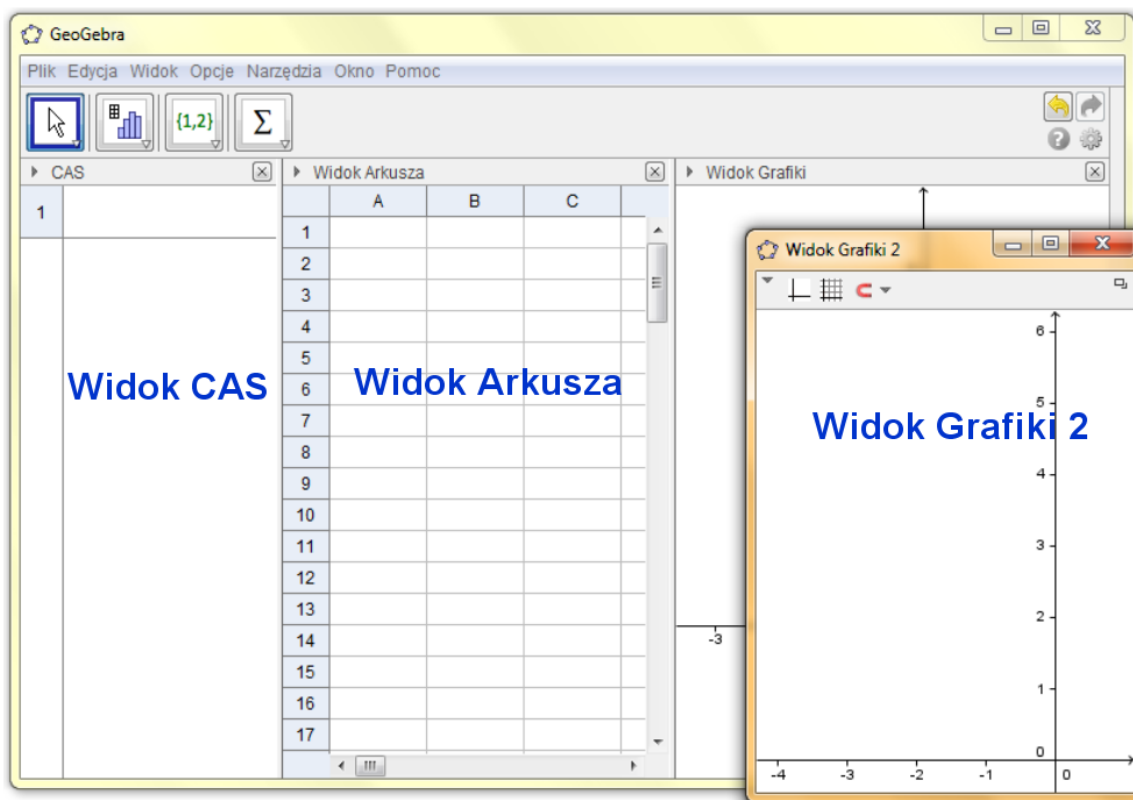
Interfejs GeoGebry jest elastyczny i można go dostosować do potrzeb uczniów. Jeśli używamy GeoGebry w szkole podstawowej to możemy pracować na czystej tablicy w *Widoku Grafiki* z narzędziami geometrycznymi.

Później pojawia się potrzeba wprowadzenia układu współrzędnych i siatki aby ułatwić zaznaczanie i odczytywanie punktów o współrzędnych całkowitych.

W szkole średniej i wyższej mamy możliwość wpisywania wyrażen algebraicznych a tym samym przygotowywania uczniów poprzez narzędzia algebry do stosowania analizy matematycznej.

Oprócz *Widoku Grafiki* i *Widoku Algebry* GeoGebra oferuje *Widok Arkusza* (kalkulacyjnego) i *Widok Algebry Komputerowej* (CAS), a także drugi *Widok Grafiki* (*Widok Grafiki 2*). Te różne opcje widoków można odkrywać i ukrywać w menu *Widok*.

Aby uzyskać szybki dostęp do różnych opcji konfiguracji interfejsu wystarczy kliknąć na ikonkę znajdującą się po środku prawej ramki *Widoku Grafiki*. Pokaże się wówczas paleta *Widoki* z gotowymi konfiguracjami do wyboru.







## Instalacja programu GeoGebra

### Przygotowania

Utwórz na pulpicie folder o nazwie *GeoGebra\_Wprowadzenie*.

Wskazówka: W trakcie zajęć zapisuj wszystkie pliki w tym folderze żeby łatwo było je potem odnaleźć..

### GeoGebra WebStart

Aby zainstalować program w wersji GeoGebra WebStart:

- Otwórz przeglądarkę internetową i wejdź na stronę [www.geogebra.org/webstart](http://www.geogebra.org/webstart).
- Kliknij przycisk z napisem *Java WebStart*.

Uwaga: Program automatycznie zacznie się instalować na komputerze. Do ciebie należeć będzie tylko zatwierdzenie przyciskiem *OK* lub *Tak* wszystkich komunikatów jakie pojawią się w trakcie instalacji.

Wskazówka: Korzystanie z wersji GeoGebra *WebStart* ma wiele zalet pod warunkiem, że w czasie instalacji masz połączenie z Internetem:

- Nie musisz zajmować się różnymi plikami ponieważ GeoGebra zainstaluje je automatycznie na twoim komputerze.
- Nie musisz posiadać specjalnych pozwoleń użytkownika, żeby korzystać z wersji GeoGebra *WebStart*, co jest szczególnie użyteczne w pracowni z komputerami lub laptopami w szkole.
- Jak tylko GeoGebra *WebStart* będzie zainstalowana możesz z niej korzystać bez połączenia z Internetem.
- Jeśli masz połączenie z Internetem, to po pierwszej instalacji GeoGebra *WebStart* sprawdza aktualizacje i instaluje je automatycznie. W ten sposób cały czas pracujesz z najnowszą wersją GeoGebry.

### Instalacje wersji GeoGebry działającej w trybie offline

Jeśli często pracujesz z komputerem w trybie offline (tzn. bez połączenia z Internetem) lub nie chcesz aby program sam się automatycznie aktualizował to warto zainstalować wersję offline:

- Ściągnij wersję instalacyjną ze strony [www.geogebra.org/installers](http://www.geogebra.org/installers) i zapisz ją na komputerze w utworzonym wcześniej folderze *GeoGebra\_Wprowadzenie*.  
Wskazówka: Upewnij się czy wybrałeś wersję instalacyjną zgodną z twoim systemem operacyjnym.
- Kliknij dwukrotnie na program instalacyjny i postępuj zgodnie z instrukcjami.




## Zapisywanie Załączonych Plików

**Ściągnij pliki dołączone do tego podręcznika i zapisz je na swoim komputerze**

- Ściągnij spakowany plik [www.geogebra.org/book/intro-pl.zip](http://www.geogebra.org/book/intro-pl.zip)
  - Zapisz ten plik do folderu *GeoGebra\_wprowadzenie*.
  - Rozpakuj pliki. Robi się to różnie, w zależności od systemu operacyjnego:  
Przykłady:  
*MS Windows XP:* Kliknij prawym przyciskiem myszki i postępuj zgodnie z instrukcjami.  
*MacOS:* Kliknij dwukrotnie na spakowany plik.

## Podstawy posługiwania się programem GeoGebra

### Korzystanie z narzędzi

- Narzędzia uaktywniamy klikając na przycisk z odpowiednią ikoną.
- Listę z narzędziami rozwijamy klikając na mały trójkącik w prawym dolnym rogu przycisku z ikoną aby wybrać inne narzędzie z tej listy.  
Wskazówka: Nie musisz rozwijać listy z narzędziami za każdym razem gdy chcesz wybrać narzędzie. Jeśli ikona potrzebnego narzędzia jest widoczna (bez rozwijania listy) to klikając w nią uaktywniasz narzędzie bezpośrednio.  
Warto wiedzieć: Listy zawierają narzędzia, które są do siebie podobne lub generują te same typy nowych obiektów.
- Aby uzyskać pomoc na temat aktywnego narzędzia klikamy na ikonę  znajdującą się po prawej stronie od paska narzędzi.

## Zapisywanie i otwieranie plików GeoGebry

### Zapisywanie plików GeoGebry



- Otwórz w menu polecenie *Plik* i wybierz *Zapisz*.
- Wybierz w oknie dialogowym folder *GeoGebra\_wprowadzenie*.
- Wpisz nazwę pliku GeoGebry.
- Kliknij na polecenie *Zapisz* aby dokończyć proces.

Wskazówka: Zostanie utworzony plik z rozszerzeniem *'.ggb'*. Rozszerzenie to identyfikuje pliki utworzone w GeoGebra i wskazuje, że mogą być otwarte tylko w programie GeoGebra.

Wskazówka: Nazywaj pliki właściwie: unikaj spacji i znaków specjalnych, gdyż w przeciwnym razie może to spowodować niepotrzebne problemy przy przenoszeniu tych plików na inne komputery. Zamiast tego korzystaj z dużych i małych liter lub ze znaków podkreślenia (np. *Moj\_Pierwszy\_Rysunek.ggb*).





## Otwieranie plików GeoGebry

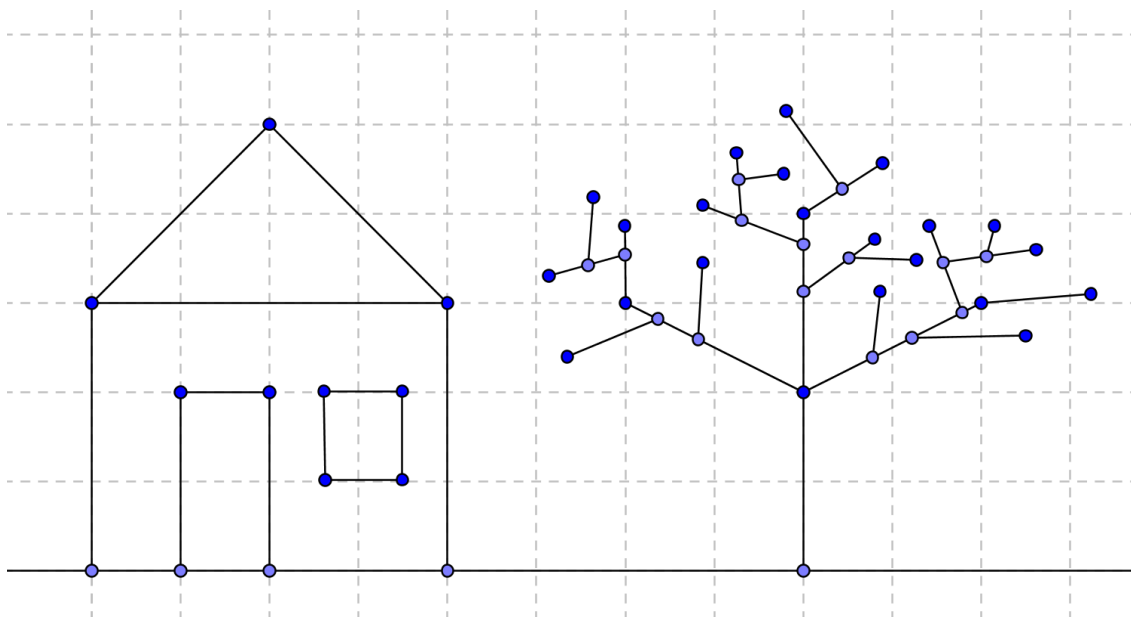
- Otwórz **nowe okno w GeoGebrze** (menu *Plik* –  *Nowe okno*).
- Otwórz **nowy pusty plik** GeoGebry w obrębie tego samego okna (menu *Plik*– *Nowy*).
- Otwórz **istniejący już plik GeoGebry** (menu *Plik*–  *otwórz*).
  - Znajdź plik w oknie dialogowym, które się pojawi.
  - Wybierz plik GeoGebry (rozszerzenie *'.ggb'*) i kliknij *Otwórz*.

Uwaga: Jeśli nie zapisałeś istniejącej konstrukcji GeoGebra zapyta cię, czy ją zachować zanim otworzysz nową konstrukcję

## Tworzenie rysunku w GeoGebrze

### Przygotowania








- Kliknij na strzałkę znajdującą po środku prawej ramki *Widoku Grafiki* i wybierz ikonę  *Geometria Podstawowa* z bocznej palety *Widoki*.
- Kliknij dwukrotnie myszką (MacOS: *Ctrl*-klik) na pasek z napisem *Widok Grafiki* i wybierz  *Siatkę* aby wyświetlić linie siatki.





## Rysowanie obrazków w GeoGebra

Przy pomocy myszki i następującego zestawu narzędzi narysuj różne figury w obszarze roboczym *Widoku Grafiki* (np. kwadrat, prostokąt, domek, drzewko, ...).

	<b>Nowy Punkt</b> <i>Wskazówka:</i> Aby utworzyć punkt należy kliknąć w dowolnym miejscu <i>Widoku Grafiki</i> .	<b>Nowe!</b>
	<b>Przesuń</b> <i>Wskazówka:</i> Aby przesunąć obiekt należy przeciągnąć go przy wciśniętym lewym przycisku myszki.	<b>Nowe!</b>
	<b>Prosta przechodząca przez dwa punkty</b> <i>Wskazówka:</i> Klikamy w dwóch miejscach <i>Widoku Grafiki</i> lub na istniejące już punkty.	<b>Nowe!</b>
	<b>Odcinek między dwoma punktami</b> <i>Wskazówka:</i> Klikamy w dwóch miejscach <i>Widoku Grafiki</i> lub na istniejące już punkty.	<b>Nowe!</b>
	<b>Usuń obiekt</b> <i>Wskazówka:</i> Klikamy na obiekt, który chcemy usunąć.	<b>Nowe!</b>
	<b>Cofnij / Ponów</b> <i>Wskazówka:</i> Cofamy poprzedni krok konstrukcji lub ponawiamy cofnięty krok. Ikona z tym narzędziem znajduje się z prawej strony <i>Paska Narzędzi</i> .	<b>Nowe!</b>
	<b>Przemieszczaj obszar roboczy.</b> <i>Wskazówka:</i> Przeciągając myszką przy wciśniętym lewym przycisku myszki przemieszczamy widoczną część <i>Widoku Grafiki</i> .	<b>Nowe!</b>
	<b>Powiększ / Pomniejsz</b> <i>Wskazówka:</i> Powiększamy/pomniejszamy obraz klikając w dowolnym miejscu <i>Widoku Grafiki</i> .	<b>Nowe!</b>

Wskazówka: Chcąc przeczytać krótką informację na temat działania danego narzędzia wystarczy przenieść kursor myszki nad jego ikonę.

## Co warto poćwiczyć

- Jak zaznaczać istniejący obiekt.  
*Wskazówka:* Gdy wskaźnik myszki znajduje się dostatecznie blisko obiektu, to obiekt ten się podświetla a wskaźnik myszki zmienia kształt z krzyżyka na strzałkę. Kliknięcie powoduje zaznaczenie obiektu.
- Jak utworzyć punkt, który będzie leżał na obiekcie.  
*Wskazówka:* Punkt umieszczony na obiekcie ma domyślnie kolor błado niebieski. Zawsze sprawdź czy punkt rzeczywiście leży na obiekcie przeciągając go myszką (aby to zrobić, należy uaktywnić narzędzie *Przesuń*)
- Jak poprawiać błędy stosując krok o kroku przyciski *Cofnij/Ponów*.



Uwaga: Niektóre narzędzia pozwalają tworzyć punkty “w locie”. Oznacza to, że do korzystania z nich nie są potrzebne wcześniej utworzone punkty.

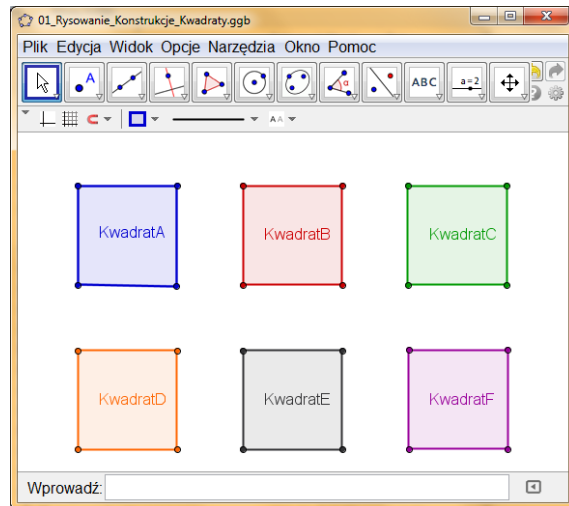
Przykład: Narzędzie *Odcinek między dwoma punktami* można zastosować do istniejących punktów lub do pustych miejsc w *Widoku Grafiki*. Klikając w dwóch miejscach, automatycznie tworzą się odpowiednie punkty i odcinek, który je łączy.

## Rysunki, konstrukcje i test z przeciąganiem

Otwórz plik [Rysunek cz Konstrukcja Kwadraty.html](#).

Aplet w arkuszu przedstawia kilka kwadratów utworzonych na różne sposoby. Przetestuj je przeciągając myszką różne wierzchołki.

- Odkryj, które kwadraty nadal pozostają kwadratami, a które nie.
- Postaraj się odgadnąć, w jaki sposób utworzone zostały poszczególne figury.
- Zapisz swoje spostrzeżenia.



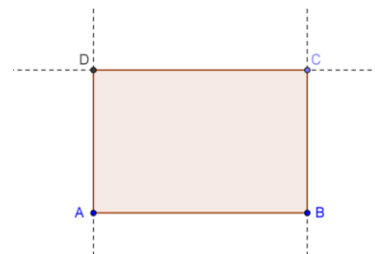
## Dyskusja

- Jaka jest różnica między rysunkiem a konstrukcją?
- Na czym polega “test z przeciąganiem” i dlaczego jest on taki ważny?
- Dlaczego w interaktywnym programie geometrycznym ważne jest, aby konstruować figurę zamiast po prostu ją rysować?
- Co musimy wiedzieć o figurze, aby ją skonstruować przy pomocy dynamicznego programu matematycznego?

## Konstrukcja prostokąta

### Przygotowania





- Przed rozpoczęciem konstrukcji przypomnij sobie własności prostokątów.  
Uwaga: Jeśli nie wiesz jak wykonać konstrukcję prostokąta krok po kroku możesz otworzyć [Prostokat\\_Konstrukcja.ggb](#). Skorzystaj z przycisków *Paska nawigacji etapów konstrukcji* aby odtworzyć przebieg konstrukcji.
- Otwórz nowy plik GeoGebry.














- W panelu Widoki przełącz się na  Geometrię
- Ustaw *Etykietowanie* na opcję *Tylko nowe punkty* (menu: Opcje-Etykietowanie).

## Nowe narzędzia

	<b>Proste prostopadłe</b> <span style="float: right;"><b>Nowe!</b></span> <u>Wskazówka:</u> Wskaż kliknięciem myszki istniejącą prostą i punkt, żeby utworzyć prostą prostopadłą przechodzącą przez ten punkt.
	<b>Proste równoległe</b> <span style="float: right;"><b>Nowe!</b></span> <u>Wskazówka:</u> Wskaż kliknięciem myszki istniejącą prostą i punkt, żeby utworzyć prostą równoległą przechodzącą przez ten punkt.
	<b>Przecięcie dwóch obiektów</b> <span style="float: right;"><b>Nowe!</b></span> <u>Wskazówka:</u> Wskaż, kliknięciem myszki miejsce przecięcia dwóch obiektów aby utworzyć ich punkt wspólny. Aby otrzymać wszystkie punkty przecięcia się dwóch obiektów należy te dwa obiekty wskazać kliknięciem myszki.
	<b>Wielokąt</b> <span style="float: right;"><b>Nowe!</b></span> <u>Wskazówka:</u> Kliknij myszką na istniejące już punkty lub w puste miejsca <i>Widoku Grafiki</i> aby wskazać wierzchołki wielokąta. Po wskazaniu ostatniego wierzchołka, kliknij na pierwszy punkt, aby zamknąć wielokąt. Zawsze wskazuj wierzchołki w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara!

## Kroki konstrukcji


1		Narysuj odcinek $AB$ .
2		Narysuj prostą $b$ przechodzącą przez punkt $B$ i prostopadłą do odcinka $AB$ .
3		Wstaw nowy punkt $C$ na prostej prostopadłej $b$ .
4		Narysuj prostą $c$ przechodzącą przez punkt $C$ równoległą do odcinka $AB$ .
5		Narysuj prostą $d$ przechodzącą przez punkt $A$ i prostopadłą do odcinka $AB$ .
6		Zaznacz punkt $D$ przecięcia się prostych $c$ i $d$ .
7		Narysuj wielokąt $ABCD$ . <u>Wskazówka:</u> Aby zamknąć wielokąt należy po kliknięciu na ostatni wierzchołek kliknąć ponownie na pierwszy wierzchołek.
8		Zapisz konstrukcję.
9		Zastosuj test z przeciąganiem dla sprawdzenia poprawności konstrukcji.





## Pasek nawigacji i protokół konstrukcji

Kliknij prawym przyciskiem myszki (MacOS: *Ctrl*-klik) w pustym miejscu *Widoku Grafiki* i z menu kontekstowego wybierz polecenie *Pasek Nawigacji* aby odtworzyć konstrukcję krok po kroku.














Możesz także otworzyć  *Protokół Konstrukcji* (menu *Widok*) aby otrzymać szczegółowe informacje na temat kolejnych kroków konstrukcji. Zauważ, że na pasku nawigacji po prawej stronie znajduje się także przycisk dostępu do protokołu konstrukcji.

## Co warto poćwiczyć

- Spróbuj zmienić kolejność pewnych kroków konstrukcji przeciągając myszką różne wiersze w protokole konstrukcji. Czasami NIE da się tego zrobić. Dlaczego?
- Pogrupuj kroki konstrukcji w sekwencje poprzez ustawienie punktów przerwania:
  - i. Wyświetl kolumnę Punkt Przerwania w menu podręcznym  Kolumny. (Kolumny – Punkt Przerwania)
  - ii. Pogrupuj kroki konstrukcji w sekwencje zahaczając okienka na końcu każdej z wybranych sekwencji.
  - iii. W menu podręcznym Opcje  wybierz *Pokaż tylko punkty przerwania*
  - iv. Użyj Paska nawigacji etapów konstrukcji aby prześledzić konstrukcję sekwencja po sekwencji zgodnie z wybranymi przez siebie punktami przerwania. Czy ustawiłeś właściwie punkty przerwania?

Protokół Konstrukcji - Prostokat\_Konstrukcja.ggb

nr	Nazwa	Ik...	Polecenie	Wartość	Opis
1	Odcinek...		Odcinek[A, B]	a = 7.09	
2	Prosta b		Prostopadła [B, a]	b: x = 4.56	
3	Punkt C		Punkt[b]	C = (4.56, 4....	
4	Prosta c		Prosta[C, a]	c: y = 4.03	
5	Prosta d		Prosta[A, b]	d: x = -2.53	
6	Punkt D		Przecięcie[c, d]	D = (-2.53, 4...	
7	Odcinek d <sub>1</sub>		Odcinek[D, A, poly1]	d <sub>1</sub> = 4.65	

Navigation bar:   1 / 7  

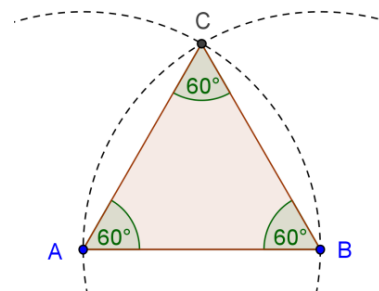




## Konstrukcja trójkąta równobocznego

### Przygotowania

- Przypomnij sobie własności trójkąta równobocznego.
- Wskazówka: Jeśli nie wiesz jak krok po kroku wykonać konstrukcję trójkąta równobocznego, możesz otworzyć plik: [Trojkat Rownoboczny Konstrukcja.ggb](#). Zastosuj przyciski *Paska nawigacji etapów konstrukcji* aby odtworzyć przebieg tej konstrukcji.
- Otwórz nowe okno w GeoGebraze.
- W palecie *Widoki* wybierz *Geometria*
- Ustaw Etykietowanie na opcję Tylko nowe punkty (menu: Opcje).



### Nowe narzędzia

	<b>Okrąg o danym środku przechodzący przez punkt</b> <b>Nowe!</b> <u>Wskazówka</u> : Pierwsze kliknięcie tworzy środek, drugie wyznacza punkt leżący na okręgu.
	<b>Pokaż / ukryj obiekt</b> <b>Nowe!</b> <u>Wskazówka</u> : Zaznacz wszystkie obiekty, które chcesz ukryć. Zmiana widoczności zadziała dopiero po uruchomieniu innego narzędzia!
	<b>Kąt</b> <b>Nowe!</b> <u>Wskazówka</u> : Kliknij punkt pierwszego ramienia, wierzchołek i punkt drugiego ramienia w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara. Można też wskazać kolejno pierwsze i drugie ramię kąta. GeoGebra domyślnie tworzy kąty zorientowane dodatnio

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

### Kroki Konstrukcji

1		Narysuj odcinek $AB$ .
2		Narysuj okrąg o środku $A$ i przechodzący przez punkt $B$ .
		<u>Wskazówka</u> : Przeciągnij myszką punkty $A$ i $B$ , żeby sprawdzić czy okrąg jest z nimi powiązany.
3		Narysuj okrąg o środku $B$ i przechodzący przez punkt $A$ .





4		Zaznacz punkt $C$ w jednym z miejsc przecięcia się utworzonych okręgów.
5		Narysuj trójkąt $ABC$ wskazując wierzchołki w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara
6		Ukryj okręgi.
7		Pokaż kąty wewnętrzne trójkąta. <u>Wskazówka:</u> Po wybraniu narzędzia, kliknij myszką w dowolnym miejscu obszaru wewnętrznego trójkąta, a pokażą się wtedy wszystkie kąty wewnętrzne trójkąta! <u>Uwaga:</u> Wielokąt utworzony 'zgodnie z ruchem wskazówek' zegara da w takim przypadku kąty na zewnątrz!
8		Zapisz konstrukcję
9		Zastosuj test przez przeciąganie dla sprawdzenia poprawności konstrukcji.

## Właściwości obiektów w GeoGebra

### Pasek Stylu Widoku Grafiki

Zauważ, że w *Widoku Grafiki* w lewym górnym rogu znajduje się ikonka w kształcie strzałki (*Przełączanie Paska Narzędzi*). Kliknięcie na nią powoduje wyświetlanie opcji wyglądu zaznaczonych narzędzi. W zależności od tego jaki obiekt jest zaznaczony na pasku pokazują się różne opcje takie jak kolor, rozmiar, styl. Na zrzucie ekranu poniżej można zobaczyć opcje wyświetlania i ukrywania *osi* i *siatki*, opcje *przyciągania* punktów do siatki, ustawienia *koloru*, *stylu* punktu, itd.



Uwaga: Każdy widok ma swój własny pasek stylu. Aby go wyświetlić wystarczy kliknąć w ikonkę ze strzałką w lewym górnym narożniku danego widoku.

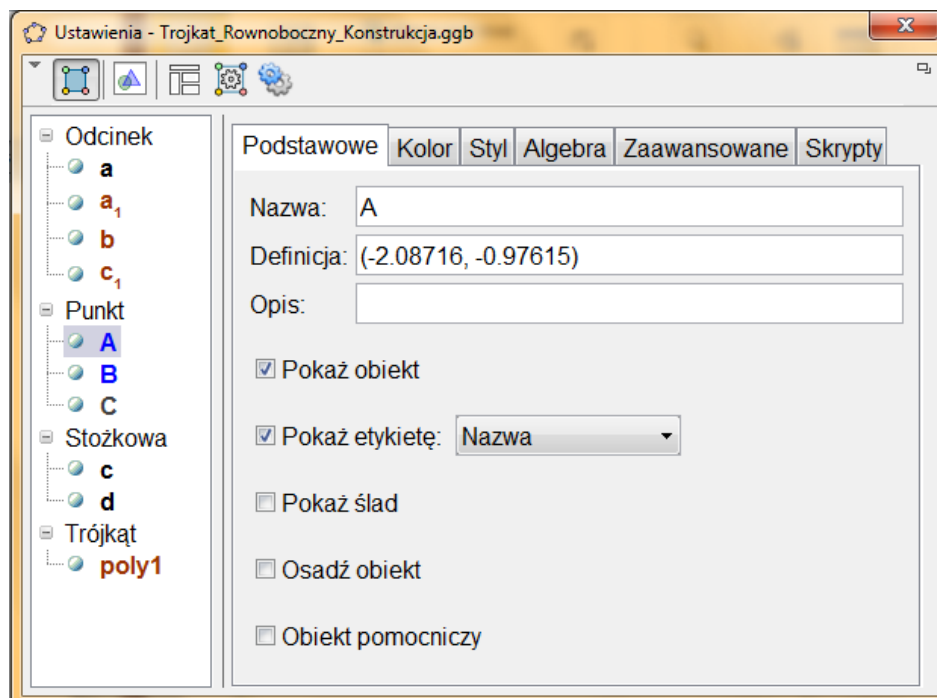
### Okno Dialogowe Właściwości

Do wyświetlenia wszystkich właściwości obiektu wykorzystujemy okno dialogowe *Właściwości*. Można je otworzyć na kilka sposobów:

- Klikamy na ikonę *Ustawienia* po prawej stronie *Paska Narzędzi*. Następnie w menu podręcznym wybieramy ikonę *Obiekty*.



- Klikamy prawym przyciskiem myszki (MacOS: *Ctrl*-klik) na danym obiekcie i w menu podręcznym wybieramy ikonę *Właściwości...*
- W *Menu* wybieramy polecenie *Edycja* i w menu podręcznym *Właściwości...*
- Wybieramy narzędzie *Przesuń* i klikamy dwukrotnie a obiekt w Widoku Grafiki. W oknie dialogowym *Przedefiniuj* , które się pojawi na przycisk *Właściwości*.



## Co warto poćwiczyć w oknie dialogowym *Właściwości*

- Wybierz dowolny obiekt z listy po lewej stronie i odkryj dostępne zakładki z właściwościami. Są one różne dla różnych typów obiektów.
- Wybierz kilka obiektów jednocześnie, żeby zmienić ich wspólną własność.  
Wskazówka: Aby zaznaczyć kilka obiektów na raz należy klikać na wybrane obiekty przy wciśniętym klawiszu *Ctrl* (MacOS: klawisz *Cmd*).
- Wybierz wszystkie obiekty jednego typu klikając na odpowiedni nagłówek.
- Wyświetl wartości różnych obiektów. Wypróbuj różne style obiektów.
- Zmień domyślne właściwości niektórych obiektów (np. kolor, styl,...).



## Zadanie Dnia: Konstrukcja Trójkąta Równoramiennego

Skonstruuj trójkąt równoramienny, w którym można będzie zmieniać długość podstawy i wysokość przeciągając myszką odpowiednie wierzchołki.

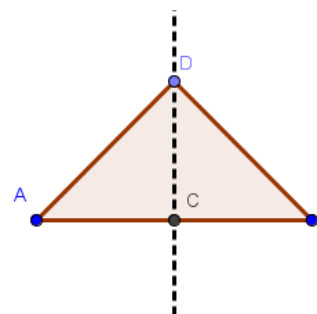
Poniżej widoczne są narzędzia potrzebne do wykonania tej konstrukcji.

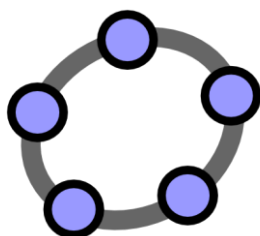
	Odcinek między dwoma punktami		Nowy punkt
	Środek		Wielokąt
	Proste prostopadłe		Przesuń

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

### Podpowiedzi i wskazówki

- Przypomnij sobie własności figur, które chcesz tworzyć.
- Przemyśl jakie narzędzia GeoGebry potrzebne Ci będą do konstrukcji figury analizując jej własności (np. kąt prosty – narzędzie *Proste prostopadłe*).
- Upewnij się, że umiesz posługiwać się potrzebnymi narzędziami zanim przystąpisz do konstrukcji. Jeśli nie wiesz jak posługiwać się danym narzędziem, uaktywnij je i kliknij ikonkę *Pomocy* aby odczytać wskazówki w oknie dialogowym, które się pojawi.
- Do każdego ćwiczenia otwórz nowe okno GeoGebry (*Menu-Okno-Nowe okno*) i przełącz *Widoki* na *Geometrię*.
- Jeśli się pomylisz możesz skorzystać z przycisków przyciski *Cofnij* i *Ponów*.
- Często korzystaj z narzędzia *Przesuń* aby sprawdzić poprawność konstrukcji (np. czy obiekty są faktycznie połączone, czy nie utworzyłeś jakich niepotrzebnych obiektów)
- Jeśli masz pytania, zapytaj najpierw kolegę/koleżankę zanim zgłosisz się do osoby prowadzącej zajęcia lub asystenta.





# Konstrukcje geometryczne i stosowanie poleceń

GeoGebra | Warsztaty | Część 2

---

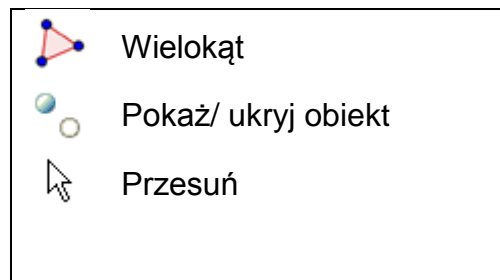
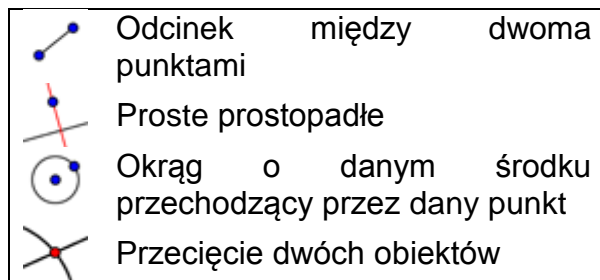
## Spis Treści

2.1.	<a href="#">KONSTRUKCJA KWADRATU</a> .....	21
2.2.	<a href="#">KONSTRUKCJA SZEŚCIOKĄTA FOREMNEGO</a> .....	22
2.3.	<a href="#">KONSTRUKCJA OKRĘGU OPISANEGO NA TRÓJKĄCIE</a> .....	24
2.4.	<a href="#">KĄT OPARTY NA ŚREDNICY</a> .....	25
2.5.	<a href="#">KONSTRUKCJA STYCZNYCH DO OKRĘGU</a> .....	26
2.6.	<a href="#">BADANIE PARAMETRÓW FUNKCJI KWADRATOWEJ</a> .....	29
2.7.	<a href="#">WYKORZYSTANIE SUWAKÓW DO ZMIANY PARAMETRÓW</a> .....	30
2.8.	<a href="#">ZADANIE DNIA: PARAMETRY WIELOMIANÓW</a> .....	32



## Konstrukcja kwadratu

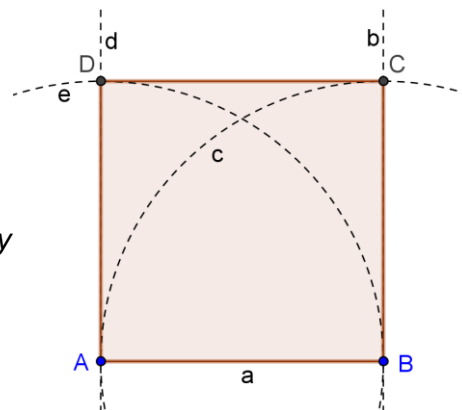
Do tej konstrukcji wykorzystamy następujące narzędzia. Upewnij się czy potrafisz je stosować zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji kwadratu. .



Wskazówka: Jeśli nie jesteś pewien jak po kolei wykonać konstrukcję możesz zajrzeć do pliku [Kwadrat Konstrukcja.ggb](#).

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno GeoGebry.
- W panelu *Widoki* wybierz *Geometrię*.
- Ustaw opcję etykietowania *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje*–*Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

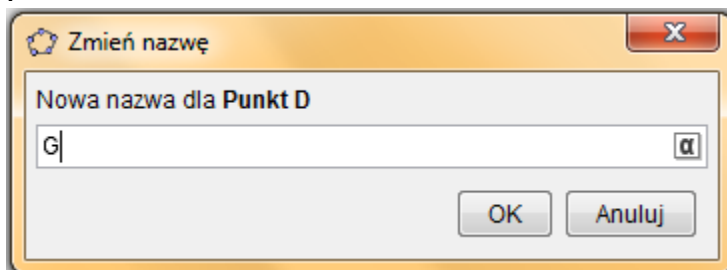
1		Narysuj odcinek $a = AB$ między punktami A i B.
2		Utwórz prostą $b$ przechodzącą przez punkt B i prostopadłą do odcinka AB.
3		Utwórz okrąg $c$ o środku B i przechodzący przez punkt A.
4		Utwórz punkty C, D przecięcia się prostopadłej $b$ z okręgiem $c$ .
5		Utwórz prostą $d$ przechodzącą przez punkt A i prostopadłą do odcinka AB.
6		Utwórz okrąg $e$ o środku A i przechodzący przez punkt B.
7		Utwórz punkty E i F przecięcia się prostej $d$ i okręgu $e$ .
8		Utwórz czworokąt ABCE. <u>Uwaga:</u> Aby zamknąć wielokąt należy po kliknięciu na punkt E kliknąć na punkt początkowy A.
9		Ukryj okręgi i proste.



10		Przeprowadź test z przeciąganiem aby sprawdzić poprawność konstrukcji.
11		Wykorzystaj okno dialogowe <i>Właściwości</i> aby ukryć proste i okręgi wykorzystane w konstrukcji.

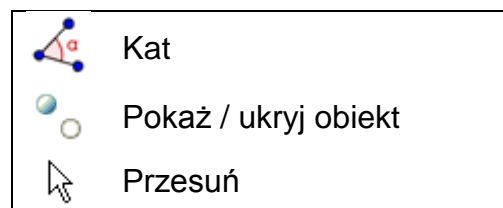
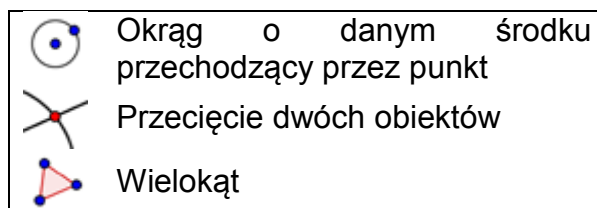
Zadanie: Pomyśl o innej metodzie konstrukcji kwadratu.

Wskazówka: Aby szybko zmienić nazwę obiektu uruchom narzędzie *Przesuń*, przybliż kursor myszki do obiektu i gdy obiekt zostanie podświetlony rozpocznij pisanie nowej nazwy z klawiatury (okno dialogowe *Zmień nazwę* pojawi się wówczas automatycznie).



## Konstrukcja sześciokąta foremnego

Do tej konstrukcji wykorzystamy następujące narzędzia.

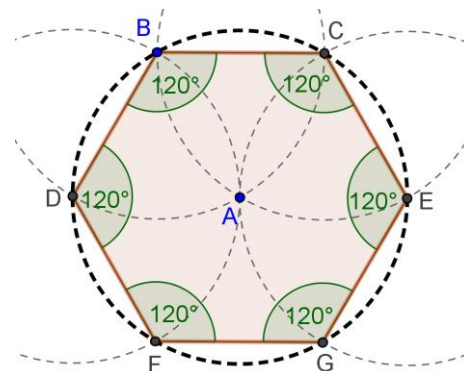


Upewnij się czy potrafisz je stosować zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji sześciokąta foremnego.

Wskazówka: Jeśli nie jesteś pewien jak po kolei wykonać konstrukcję możesz zajrzeć do pliku [Szesciokat\\_Konstrukcja.html](http://Szesciokat_Konstrukcja.html).

## Przygotowania

- Otwórz nowe okno GeoGebry.
- W panelu *Widoki* wybierz *Geometrię*.
- Ustaw opcję etykietowania Tylko nowe punkty (menu Opcje–Etykietowanie).





## Kroki konstrukcji

1		Narysuj okrąg $c$ o środku $A$ przechodzący przez punkt $B$ .
2		Narysuj okrąg $d$ o środku $B$ przechodzący przez punkt $A$ .
3		Utwórz punkty $C$ i $D$ przecięcia się okręgów $c$ i $d$ .
4		Narysuj okrąg $e$ o środku $C$ przechodzący przez punkt $A$ .
5		Wstaw punkt $E$ w miejscach przecięcia się nowego okręgu $e$ z pierwszym okręgiem $c$ . <u>Wskazówka:</u> Zaznaczając okręgi $e$ i $c$ utworzysz dwa punkty. Jeśli chcesz utworzyć tylko jeden z tych punktów kliknij myszką bezpośrednio w miejscu tego punktu.
6		Utwórz okrąg $f$ o środku $D$ i przechodzący przez punkt $A$ .
7		Utwórz punkt $F$ w miejscu przecięcia się nowego okręgu $f$ z okręgiem $c$ .
8		Utwórz nowy okrąg $g$ o środku $E$ i przechodzący przez punkt $A$ .
9		Utwórz punkt $G$ w miejscu przecięcia się nowego okręgu $g$ z okręgiem $c$ .
10		Narysuj sześciokąt $FGECBD$ .
11		Ukryj okręgi.
12		Wyświetl kąty wewnętrzne sześciokąta.
13		Zastosuj test z przeciąganiem aby sprawdzić poprawność konstrukcji.

Zadanie: Wyjaśnij dlaczego konstrukcja sześciokąta foremego przebiega w ten sposób.

Wskazówka: Jaki jest związek między promieniami okręgów a bokami skonstruowanego sześciokąta?



## Konstrukcja okręgu opisanego na trójkącie

Do tej konstrukcji wykorzystamy następujące narzędzia.

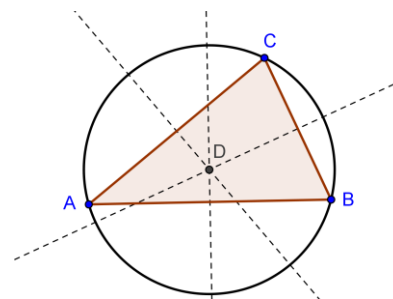
Wielokąt Symetralna <b>Nowe!</b> Przecięcie dwóch obiektów	Okrąg o danym środku przechodzący przez punkt Przesuń
--	--

Upewnij się czy potrafisz je stosować zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji.

Wskazówka: Jeśli nie jesteś pewien jak po kolei wykonać konstrukcję możesz zajrzeć do pliku [Okrag Opisan\\_y na Trojkatcie Konstrukcja.html](http://Okrag_Opisan_y_na_Trojkatcie_Konstrukcja.html).

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno GeoGebry.
- W panelu *Widoki* wybierz Geometrię.
- Ustaw opcję etykietowania Tylko nowe punkty (menu Opcje–Etykietowanie).



### Opis nowego narzędzia

Symetralna <b>Nowe!</b>
-------------------------



Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

### Kroki konstrukcji

1	Utwórz trójkąt $ABC$ .
2	Utwórz symetralne boków trójkąta. <u>Uwaga:</u> Narzędzie <i>Symetralna</i> stosuje się do istniejącego odcinka lub jego końców.
3	Utwórz punkt $D$ przecięcia się symetralnych boków trójkąta. <u>Wskazówka:</u> Narzędzie <i>Przecięcie dwóch obiektów</i> nie może być zastosowane do trzech prostych. Należy zaznaczyć dwie spośród trzech prostych.





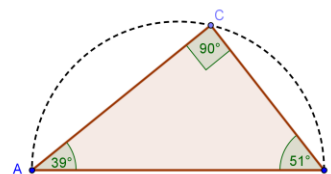
4		Utwórz okrąg o środku $D$ i przechodzący przez dowolny wierzchołek trójkąta $ABC$ .
5		Zastosuj test z przeciąganiem aby sprawdzić poprawność konstrukcji.

## Powrót do szkoły...

Zmień położenie różnych elementów konstrukcji:

1. Czy środek okręgu opisanego na trójkącie może leżeć poza jego obszarem? Jeśli tak, to dla jakich trójkątów to zachodzi?
2. Spróbuj wyjaśnić, dlaczego do wyznaczenia środka okręgu opisanego na trójkącie wykorzystuje się symetralne odcinków?




## Kąt oparty na średnicy






## Powrót do szkoły...

Zanim zaczniesz tę konstrukcję, otwórz arkusz dynamiczny o nazwie [Kat Wpisany Oparty na Srednicy.html](#) aby zobaczyć jak uczniowie mogliby na nowo odkryć to co grecki filozof i matematyk Tales odkrył około 2600 lat temu.

Do tej konstrukcji wykorzystamy następujące narzędzia.

	Odcinek między dwoma punktami
	Półokrąg wyznaczony przez dwa punkty
	Nowy Punkt


**Nowe!**

	Wielokąt
	Kąt
	Przesuń

Upewnij się czy potrafisz je stosować zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji.

Podpowiedź: Jeśli nie jesteś pewien co do przebiegu konstrukcji, możesz zajrzeć do pliku [Kat Wpisany Oparty na Srednicy.html](#).

## Przygotowania

- Otwórz nowe okno GeoGebry.
- W panelu *Widoki* wybierz  *Geometrię*.
- Ustaw opcję etykietowania Tylko nowe punkty (menu Opcje–Etykietowanie).



## Nowe narzędzie

	<p>Półokrąg wyznaczony przez dwa punkty <span style="float: right;">Nowe!</span>  <u>Uwaga:</u> Tworzony półokrąg zależy nie tylko od wskazanych punktów (np. <math>A</math> i <math>B</math>) ale także od kolejności ich wskazywania</p>
--	--

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1		Utwórz odcinek $AB$ .
2		Utwórz półokrąg o końcach w punktach $A$ i $B$ .
3		<p>Utwórz punkt <math>C</math> na półokręgu.  <u>Wskazówka:</u> Przeciągnij punkt <math>C</math> aby sprawdzić czy na pewno leży on na półokręgu.</p>
4		Utwórz trójkąt $ABC$ wskazując wierzchołku w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
5		<p>Wyświetl kąty wewnętrzne trójkąta <math>ABC</math>.  <u>Wskazówka:</u> Kliknij myszką w obszarze wewnętrznym trójkąta..</p>
6		Przesuń punkt $C$ aby zaobserwować jak zmieniają się miary kątów w trójkącie $ABC$ .

Zadanie: Sformułuj twierdzenie na temat kąta  $ACB$ .

Pomyśl nad graficznym dowodem tego twierdzenia.

Wskazówki:

- Ukryj miary kątów trójkąta  $ABC$ .
- Utwórz środek  $O$  odcinka  $AB$  i narysuj odcinek  $OC$ .

## Konstrukcja stycznych do okręgu

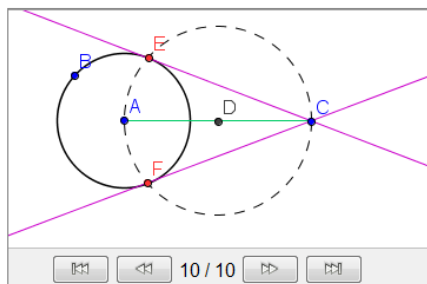
### Powrót do szkoły...

Zanim rozpoczniesz konstrukcję, otwórz arkusz dynamiczny o nazwie [Styczne do Okręgu Konstrukcja.html](#). Postępuj zgodnie z instrukcjami i odkryj jak konstruuje się styczne do okręgu..



## Konstrukcja stycznych do okręgu

1. Skorzystaj z **przycisków nawigacji** aby odtworzyć kolejne kroki konstrukcji stycznych do okręgu. .
2. Spróbuj sam wykonać **konstrukcje** w oknie po prawej stronie.
3. Zapisz protokół konstrukcji i **wyjaśnij** każdy krok konstrukcyjny.



utworzone z [GeoGebra](#)

## Dyskusja

- Z jakich narzędzi korzystałeś przy odtwarzaniu konstrukcji?
- Czy w zaproponowanej metodzie konstrukcji wykorzystywane były jakieś nowe narzędzia?
- Czy zauważyłeś pasek narzędzi wyświetlony w aplikacji po prawej stronie?
- Czy uważasz, że twoi uczniowie mogliby w podobny sposób tworzyć samodzielne konstrukcje?


## Gdy myszka lub panel dotykowy przestają działać

Wyobraź sobie, że twoja myszka lub panel dotykowy przestał działać, a ty właśnie przygotowujesz się do jutrzejszej. Jak możesz dokończyć konstrukcję?

*GeoGebra* daje możliwość posługiwania się wyrażeniami algebraicznymi, lub narzędziami geometrycznymi bez użycia myszki, przez zapisywanie odpowiednich poleceń w *Polu Wprowadzania*. Każde narzędzie ma swój odpowiednik w postaci polecenia.

Uwaga: *GeoGebra* posiada więcej poleceń niż narzędzi geometrycznych. W związku z tym nie każde polecenie ma swój odpowiednik w postaci narzędzia geometrycznego!


## Zadanie

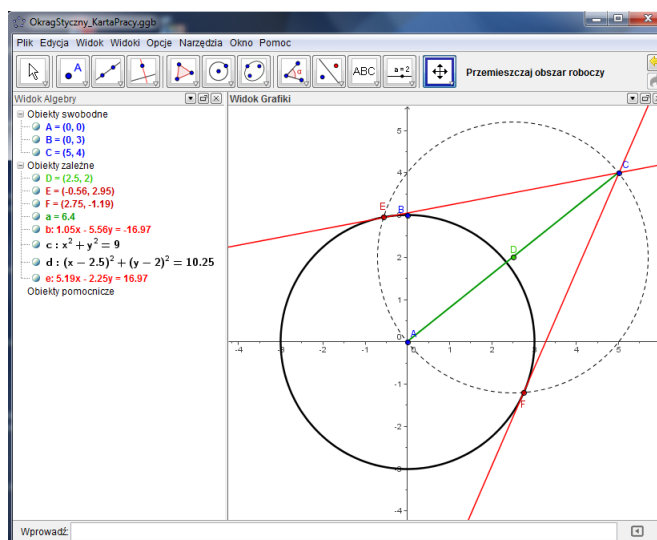
Otwórz okno dialogowe *Wprowadź Pomoc* klikając w ikonkę  znajdującą się w dolnej części interfejsu *GeoGebry* z prawej strony *Pola Wprowadzania* i poszukaj poleceń odpowiadających narzędziom geometrycznym, które były używane w trakcie warsztatów.

W ostatnim ćwiczeniu dotyczącym konstrukcji stycznych do okręgu, wszystko było wykonane za pomocą narzędzi geometrycznych. Teraz masz za zadanie odtworzyć tę konstrukcję przy użyciu klawiatury



## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra..
- W panelu Widoki przełącz się na  *Algebrę i Grafikę*.




## Kroki konstrukcji


1	$A = (0, 0)$	Utwórz punkt $A$ .
2	$(3, 0)$	Utwórz punkt $B$ . <u>Wskazówka</u> : Jeśli nie podasz nazwy obiektu to zostanie on nazwany kolejną literą alfabetu.
3	$c = \text{Okrąg}[A, B]$	Utwórz okrąg o środku $A$ i przechodzący przez punkt $B$ . <u>Wskazówka</u> : Okrąg jest obiektem zależnym od punktów $A$ i $B$ .

Uwaga: *GeoGebra* wyróżnia **obiekty swobodne** i **obiekty zależne**. O ile obiekty swobodne mogą być modyfikowane przy pomocy myszki lub klawiatury, o tyle obiekty zależne zmieniają się automatycznie przy zmianie obiektów swobodnych, tzw. obiektów rodzicielskich. W związku z tym nie ma znaczenia w jaki sposób (przy użyciu myszki czy klawiatury) obiekt był utworzony na początku.

## Zadanie 1

Uaktywnij narzędzie  *Przesuń* i kliknij dwukrotnie na obiekt w *Widoku Algebry* aby zmienić wyrażenie, które ten obiekt opisuje. Zatwierdź zmiany wciskając klawisz *Enter*.

## Zadanie 2

Uaktywnij narzędzie  *Przesuń* i zaznacz jakiś obiekt (np. punkt swobodny) w którymkolwiek z okien. Aby przesuwać obiekty w sposób bardziej precyzyjny użyj klawiszy strzałek na klawiaturze. Naciskanie klawiszy góra/dół lub lewo/prawo spowoduje przesuwanie obiektu w żądanym kierunku.



4	$C = (5, 4)$	Utwórz punkt $C$ .
5	$s = \text{Odcinek}[A, C]$	Utwórz odcinek $AC$ .
6	$D = \text{Środek}[s]$	Zaznacz środek $D$ odcinka $AC$ .
7	$d = \text{Okrąg}[D, C]$	Narysuj okrąg o środku $D$ i przechodzący przez punkt $C$ .
8	$\text{Przecięcie}[c, d]$	Zaznacz punkty $E$ i $F$ przecięcia się okręgów $c$ i $d$ .
9	$\text{Prosta}[C, E]$	Utwórz prostą (styczną) przechodzącą przez punkty $C$ i $E$ .
10	$\text{Prosta}[C, F]$	Utwórz prostą (styczną) przechodzącą przez punkty $C$ i $F$ .

## Sprawdzenie poprawności konstrukcji i zabiegi kosmetyczne

- Uaktywnij narzędzie *Przesuń* i przeprowadź test z przeciąganiem, aby sprawdzić czy konstrukcja jest poprawna.
- Zmień własności obiektów dla poprawienia wyglądu konstrukcji (np. kolory, grubość linii, obiekty pomocnicze przerywaną linią, ...)
- Zapisz konstrukcję

## Dyskusja

- Czy były jakieś problemy w trakcie wykonywania instrukcji?
- Jaki sposób przeprowadzania konstrukcji (użycie myszki czy klawiatury) wolisz i dlaczego?
- Dlaczego powinniśmy używać klawiatury skoro możemy wprowadzać elementy konstrukcji za pomocą narzędzi?  
Wskazówka: Są polecenia, które nie mają odpowiedników wśród narzędzi geometrycznych.
- Czy ma znaczenie jak tworzony był obiekt? Czy można go zmienić w *Widoku Algebry* (używając klawiatury) tak samo jak w *Widoku Grafiki* (używając myszki)?

## Badanie parametrów funkcji kwadratowej


### Powrót do szkoły...

W tym ćwiczeniu zbadamy wpływ parametrów na wielomian kwadratowy. Zobaczysz jak przy pomocy programu *GeoGebra* można zintegrować tradycyjne nauczanie z aktywnym udziałem ucznia w jego procesie poznawania.






Postępuj zgodnie z instrukcjami w poniższym arkuszu i zapisuj swoje wyniki i obserwacje w trakcie pracy z programem *GeoGebra*. Twoje notatki pomogą Ci w późniejszej dyskusji na temat tej formy aktywności.



## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na  *Algebrę i Grafikę*.

## Kroki konstrukcji

1		Wpisz $f(x) = x^2$ w <i>Polu Wprowadzania</i> i naciśnij klawisz <i>Enter</i> .  <u>Pytanie:</u> Jakiego kształtu ma wykres funkcji $f$ ?
2		Kliknij na funkcję $f$ w <i>Widoku Algebry</i> .
3		Naciśnij kilka razy klawisze $\uparrow$ góra i $\downarrow$ dół na klawiaturze.  <u>Zadanie:</u> Obserwuj jak zmienia się wzór funkcji w trakcie tej czynności.
4		Kliknij ponownie na funkcję $f$ w <i>Widoku Algebry</i> .
5		Naciśnij kilka razy klawisze $\leftarrow$ lewo i $\rightarrow$ prawo.  <u>Pytanie:</u> Jak teraz zmienia się wzór funkcji?
6		Kliknij dwukrotnie na wzór funkcji. Przy użyciu klawiatury zmień wzór funkcji na $f(x) = 3x^2$ . <u>Pytanie:</u> Jak zmienił się wykres funkcji? Powtórz czynność zmieniając parametr odpowiadający współczynnikowi 3 we wzorze funkcji (np. 0.5, -2, -0.8, 3).

## Dyskusja


- Czy w trakcie korzystanie z GeoGebry pojawiły się jakieś problemy?
- Jak tego rodzaju koncepcja przekazu (GeoGebra w połączeniu z tradycyjnym zapisem w zeszycie) może być włączona do sposobu nauczania?
- Czy uważasz, że można taki rodzaj zadania dać uczniom jako pracę domową?
- W jaki sposób dynamiczne badanie parametrów wielomianu może wpłynąć na przyswojenie materiału przez uczniów?
- Czy masz pomysły na to jakie pojęcia z innych działów matematyki mogą być nauczane w podobny sposób (zapis w zeszycie z pracą na komputerze)?

## Wykorzystanie suwaków do zmiany parametrów



Spróbujmy jeszcze bardziej dynamicznej metody badania wpływu parametrów na funkcję kwadratową  $f(x) = ax^2 + b$ . Będziemy stosować suwaki do zmiany wartości parametrów.



## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na  *Algebrę i Grafikę*.

## Kroki konstrukcji

1	Utwórz zmienną wpisując w <i>Polu Wprowadzania</i> $a = 1$ .
2	Wyświetl zmienną w postaci suwaka w <i>Widoku Grafiki</i> . <u>Wskazówka:</u> Kliknij na ikonkę  przy wartości $a$ w <i>Widoku Algebry</i> . W <i>Widoku Grafiki</i> zmień wartość parametru $a$ przeciągając myszką punkt na odcinku suwaka.
3	Wprowadź funkcję kwadratową $f(x) = a * x^2$ . <u>Uwaga:</u> Możesz nie wpisywać znaku mnożenia $*$ (np. $f(x) = ax^2$ ).
4	 Utwórz suwak $b$ za pomocą narzędzia <i>Suwak</i> . <u>Wskazówka:</u> Uaktywnij narzędzie i kliknij w <i>Widoku Grafiki</i> . Użyj domyślnych ustawień i kliknij <i>Zastosuj</i> .
5	Wprowadź funkcję $f(x) = a * x^2 + b$ . <u>Uwaga:</u> GeoGebra automatycznie nadpisze starą definicję funkcji $f$ nową definicją.

## Podpowiedzi i wskazówki

- Nazwanie obiektu** polega na wpisaniu w *Polu Wprowadzania*  
nazwa =  
Następnie po prawej stronie znaku równości  $=$  wpisujemy algebraiczną reprezentację obiektu.

Przykład: Wpisując w *Polu Wprowadzania*

$P = (3, 2)$

utworzymy punkt  $P$ .

- W poprzednich wersjach programu GeoGebra konieczne było wpisanie znaku **mnożenia** w postaci gwiazdki lub spacji. Teraz (jeśli przynajmniej jeden z czynników nie jest liczbą) nie jest to konieczne.

Przykład:  $a*x$  lub  $a x$  lub  $ax$ , ale  $5*6$  lub  $5 6$ .

- GeoGebra rozróżnia litery małe od dużych!** W związku z tym należy ostrożnie stosować wielkość liter.

Uwaga:


- Punkty zawsze nazywamy dużymi literami.  
Przykład:  $A = (1, 2)$
- Wektory zawsze nazywamy małymi literami.

Przykład:  $v = (1, 3)$



- Odcinki, proste, okręgi, funkcje ... są zawsze nazywane małymi literami.  
Przykład: okrąg  $c: (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 16$
- Zmienna  $x$  we wzorze funkcji i zmienne  $x$  i  $y$  w równaniu krzywej stożkowej muszą być zawsze pisane małymi literami.  
Przykład:  $f(x) = 3x + 2$
- Chcąc wstawić obiekt w wyrażeniu algebraicznym lub poleceniu należy ten obiekt wcześniej zdefiniować.

### Przykłady:

- $y = m x + b$  definiuje prostą, której wartościami parametrów są wartości wcześniej zdefiniowanych zmiennych (poprzez ich wpisanie w *Polu Wprowadzania* czy lub wstawienie suwaków *Widoku Grafiki*).
- $\text{Prosta}[A, B]$  definiuje prostą przechodzącą przez wprowadzone wcześniej punkty  $A$  i  $B$ .
- Wyrażenie zdefiniowane w *Polu Wprowadzania* **zatwierdzamy** klawiszem *Enter*.
- Aby **otworzyć** okno **dialogowe pomocy dla Pola Wprowadzania**, klikamy myszką w *Polu Wprowadzania* i naciskamy klawisz *F1*.
- Informacje **o błędach**: Zawsze czytaj informacje o błędach – mogą pomóc rozwiązać problem!
- **Polecenia** można wpisywać bezpośrednio lub wybierać z listy, którą otwieramy klikając na ikonkę strzałki  znajdująca się na prawo od *Pola Wprowadzania*.

Wskazówka: Jeśli chcesz dowiedzieć się czegoś więcej na temat danego polecenia, wybierz z *menu* polecenie *Pomoc* i następnie wybierz

 *Pomoc* aby otworzyć stronę internetową przewodnika GeoGebry.

Znajdują się tam szczegółowe opisy wszystkich poleceń i narzędzi.

- **Automatyczne uzupełnianie poleceń:** Po wpisaniu pierwszych liter polecenia w *Polu Wprowadzania* GeoGebra stara się automatycznie uzupełnić polecenie i wyświetlić potrzebne parametry w obrębie nawiasów.
  - Jeśli GeoGebra sugeruje żądane polecenie, wciśnij klawisz *Enter* aby ustawić kursor wewnątrz nawiasów.
  - Jeśli sugerowane polecenie nie jest tym, które chcesz wprowadzić pisz dalej do momentu gdy pokaże się pasujące polecenie.

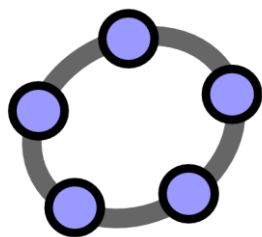
## Zadanie Dnia: Parametry wielomianów

Wykorzystaj plik utworzony w ostatnim zadaniu i wykonaj następujące ćwiczenia:

- Zmień wartość parametru  $a$  przesuwając myszką punkt na suwaku. Jakie zmiany pojawiają się na wykresie? Co dzieje się z wykresem gdy wartość parametru  $a$  jest: (a) większa niż 1, (b) między 0 i 1, lub (c) ujemna? Zapisz spostrzeżenia.
- Zmień wartość parametru  $b$ . Jak to wpływa na wykres?
- Utwórz suwak dla nowego parametru  $c$ . Wprowadź trójmian  

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c.$$
 Zmień wartość parametru  $c$  i postaraj się odkryć jaką rolę odgrywa ten parametr w odniesieniu do wykresu funkcji.





# Wyrażenia Algebraiczne, Polecenia i Funkcje. Eksportowanie Obrazków do Pamięci

GeoGebra | Warsztaty | Część 3

## Spis Treści

3.1.	<a href="#">PARAMETRY RÓWNANIA FUNKCJI LINIOWEJ</a>	34
3.2.	<a href="#">BIBLIOTEKA FUNKCJI – WIZUALIZACJA WARTOŚCI BEZWZGLĘDNEJ</a>	36
3.3.	<a href="#">BIBLIOTEKA FUNKCJI – ZŁOŻENIE FAL</a>	37
3.4.	<a href="#">WPROWADZENIE DO POCHODNYCH – NACHYLENIE WYKRESU FUNKCJI</a>	38
3.5.	<a href="#">BADANIE WŁASNOŚCI FUNKCJI WIELOMIANOWEJ</a>	40
3.6.	<a href="#">EKSPORTOWANIE OBRAZKÓW DO SCHOWKA PAMIĘCI</a>	40
3.7.	<a href="#">WKLEJANIE OBRAZKA DO DOKUMENTU EDYTORA TEKSTOWEGO</a>	42
3.8.	<a href="#">ZADANIE DNIA: TWORZENIE KARTY PRACY DLA UCZNIÓW</a>	43



## Parametry równania funkcji liniowej

Do tego ćwiczenia konstrukcji wykorzystamy następujące narzędzia.

.

Suwak prosta: $y = m x + b$ Odcinek między dwoma punktami Przecięcie[prosta, OśY]	Przecięcie dwóch obiektów Nachylenie <b>Nowe!</b> Przesuń Usuń obiekt
--	--

Upewnij się czy potrafisz je stosować zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji.

Wskazówka: Możesz wcześniej zajrzeć do pliku [Prosta Parametry.html](#).

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno GeoGebry.
- Przełącz Widoki na Algebrę & Grafikę.

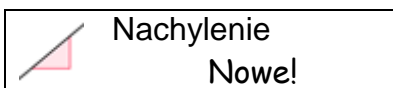
### Krok konstrukcyjny 1

Wpisz w polu wprowadzania:  $\text{prosta: } y = 0.8 x + 3.2$

### Zadanie

- Przenieść prostą zaznaczając ją *Widoku Algebry* i wciskając klawisze strzałek. Wartości jakiego parametru możesz w ten sposób zmienić?
- Przenieść prostą w *Widoku Grafiki* przy użyciu myszki. Jakiego rodzaju przekształceń dokonujesz ?

### Nowe narzędzie

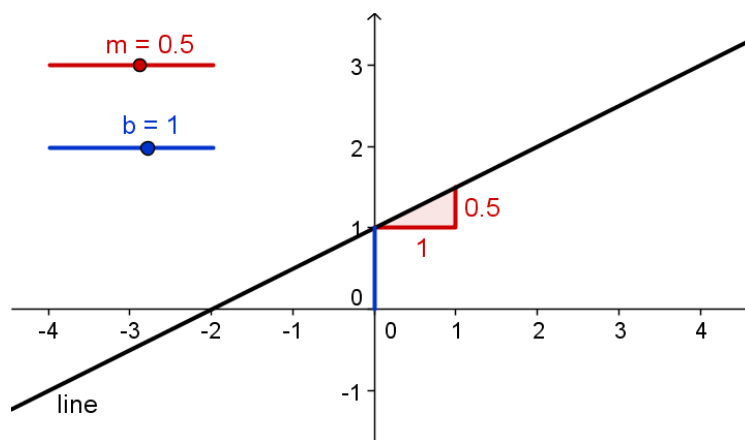


Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.



## Kroki konstrukcyjne 2

1		Usuń prostą utworzoną w kroku konstrukcyjnym 1.
2		Utwórz suwaki $m$ i $b$ z domyślnymi ustawieniami.
3		Wpisz w polu wprowadzania $\text{prosta: } y = m * x + b$ i zatwierdź <b>Enter</b>
4		Utwórz punkt $A$ przecięcia się prostej z osią $y$ . <u>Wskazówka:</u> Możesz w polu wprowadzania wpisać $\text{Przecięcie}[\text{prosta}, \text{OśY}]$ .
5		Utwórz punkt $B$ w początku układu współrzędnych.
6		Utwórz odcinek między $A$ i $B$ . <u>Wskazówka:</u> Warto pogrubić odcinek aby był widoczny na osi na osi $y$ .
7		Utwórz trójkąt pokazujący nachylenie (współczynnik kierunkowy) prostej.
8		Ukryj niepotrzebne obiekty. <u>Wskazówka:</u> Zamiast korzystania z narzędzia na pasku narzędzi wystarczy w <i>Widoku Algebry</i> kliknąć na ikonkę  poprzedzającą obiekt w <i>Widoku Algebry</i> .
9	Widok Grafiki	Przełącz pasek narzędzi w <i>Widoku Grafiki</i> i dopasuj kolory odpowiednich obiektów.



## Zadanie

Napisz instrukcje, które pomogą uczniom zbadać wpływ parametrów równania prostej na jej wykres. Instrukcje te powinny być załączone do pliku GeoGebry.




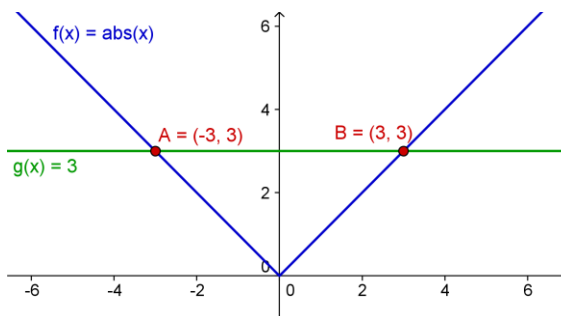
## Biblioteka funkcji – wizualizacja wartości bezwzględnej

Oprócz funkcji wielomianowych GeoGebra udostępnia wiele innych typów funkcji (np. funkcje trygonometryczne, wartość bezwzględna, funkcje wykładnicze). Funkcje są w GeoGebrze obiektami i mogą być używane w konstrukcjach geometrycznych.


Uwaga: Niektóre z dostępnych funkcji można wybrać z listy rozwijalnej z prawej strony Pola Wprowadzania. Pełną listę funkcji dostępnych w GeoGebrze można znaleźć na stronie internetowej GeoGebra Wiki (<http://wiki.geogebra.org/pl/>).

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebrze.
- Przełącz Widoki na  Algebra & Grafika.



### Kroki konstrukcji

1	Wprowadź funkcję wartość bezwzględna: $f(x) = \text{abs}(x)$ .
2	Wprowadź funkcję stałą $g(x) = 3$ .
3	 Utwórz punkty wspólne wykresów obu tych funkcji. <u>Wskazówka:</u> Każdy punkt przecięcia wykresów funkcji trzeba zaznaczyć oddzielnie, wskazując myszką oba wykresy w pobliżu danego punktu przecięcia.

Wskazówka: Możesz zamknąć *Widok Algebry* i pokazać nazwy i wartości obiektów.

### Powrót do szkoły...

- Przesuń wykres funkcji stałej w dół lub w górę myszką i lub klawiszami strzałek.
- Przesuwaj wykres funkcji wartość bezwzględna w górę i w dół myszką lub klawiszami strzałek. Jak zmienia się wzór funkcji przy tych zmianach?
- Jak można wykorzystać tę konstrukcję, żeby zapoznać uczniów z pojęciem wartości bezwzględnej?  
Wskazówka: Symetria wykresu funkcji wskazuje na to, że zwykle zadania z wartością bezwzględną mają dwa rozwiązania.



## Biblioteka funkcji – złożenie fal

### Spacer po fizyce

Fale dźwiękowe mogą być matematycznie przedstawiane w postaci sinusoidy. Każdy ton muzyczny ma postać falową opisaną równaniem  $y(t) = a * \sin(\omega * t + \varphi)$ .

Amplituda  $a$  wpływa na głośność dźwięku podczas gdy częstotliwość kątowna  $\omega$  decyduje o wysokości tonu. Parametr  $\varphi$  nazywa się fazą i pokazuje jak dźwięk zmienia się w czasie.

Jeśli dwie sinusoidy interferują, następuje nałożenie. Oznacza to, że fale te wzajemnie się wzmacniają lub tłumią. W GeoGebry możemy wykonać symulację tego zjawiska i zbadać szczególne przypadki, które także zachodzą się w naturze.

### Przygotowania

- Otwórz okno GeoGebry.
- Przełącz Widoki na – Algebra & Grafika

### Kroki konstrukcji

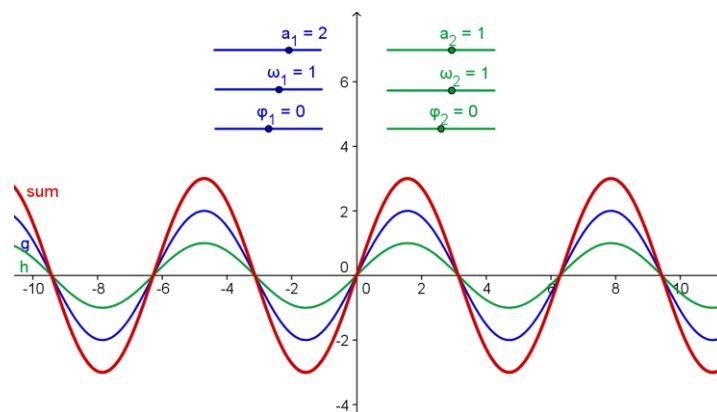
1		Utwórz trzy suwaki $a_1$ , $\omega_1$ , i $\varphi_1$ <u>Wskazówka:</u> $a_1$ tworzy $a$ z indeksem 1. Litery greckie wybieramy z listy rozwijalnej obok pola tekstowego <i>Nazwa</i> w oknie dialogowym suwaka .
2		Wprowadź funkcję sinusoidalną $g(x) = a_1 \sin(\omega_1 x + \varphi_1)$ .
3		Utwórz następne trzy suwaki $a_2$ , $\omega_2$ i $\varphi_2$ . <u>Uwaga:</u> Suwak można przemieścić w inne miejsce tylko wtedy gdy aktywne jest narzędzie <i>Suwak</i> .
4		Wprowadź nową funkcję sinusoidalną $h(x) = a_2 \sin(\omega_2 x + \varphi_2)$ .
5		Utwórz funkcję będącą sumą funkcji poprzednio wprowadzonych $sum(x) = g(x) + h(x)$ .
6		Nadaj różne kolory wykresom funkcji aby można było je łatwo rozpoznawać..



## Powrót do szkoły...

(a) Zbadaj wpływ parametrów na wykres funkcji sinusoidalnej zmieniając wartości na suwakach.

(b) Dla jakich wartości  $a_2$ ,  $\omega_2$ , i  $\varphi_2$  suma będzie miała największą amplitudę?  
Podpowiedź: W takim przypadku dźwięk wynikowy osiąga maksymalne wzmocnienie.



(c) Dla jakich wartości  $a_2$ ,  $\omega_2$ , i  $\varphi_2$  obie funkcje wzajemnie się wygaszają.  
Podpowiedź: W tym przypadku nie usłyszymy żadnego dźwięku.

## Wprowadzenie do pochodnych – nachylenie wykresu funkcji

W tym ćwiczeniu wykorzystamy następujące narzędzia i polecenia.

$f(x) = x^2/2 + 1$

Nowy Punkt

Styczne

nachylenie = Nachylenie[t]

$S = (x(A), \text{slope})$

Odcinek między dwoma punktami

Przesuń

Zanim przystąpisz do właściwej konstrukcji upewnij się czy potrafisz się nimi posługiwać.

Wskazówka: Możesz wcześniej zajrzeć do pliku [Nachylenie Wykresu Funkcji.html](#).

## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na - Algebra & Grafika.



## Nowe Narzędzie

	<p><b>Styczne</b> <b>Nowe!</b>  <u>Wskazówka:</u> Kliknij na punkt wykresu, a następnie na wykres.</p>
--	--

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1	Wprowadź funkcję $f(x) = x^2/2 + 1$ .
2	Utwórz punkt $A$ na wykresie funkcji $f$ . <u>Wskazówka:</u> Przesuń punkt $A$ żeby sprawdzić czy jego zasięg poruszania rzeczywiście ogranicza się do wykresu funkcji.
3	Utwórz styczną $t$ do wykresu funkcji $f$ w punkcie $A$ .
4	Utwórz trójkąt nachylenia stycznej $t$ wprowadzając: <code>nachylenie = Nachylenie[t]</code> .
5	Zdefiniuj punkt $S$ : $S = (x(A), \text{nachylenie})$ . <u>Wskazówka:</u> $x(A)$ oznacza współrzędną $x$ punktu $A$ .
6	Utwórz odcinek między punktami $A$ i $S$ .

## Powrót do szkoły...

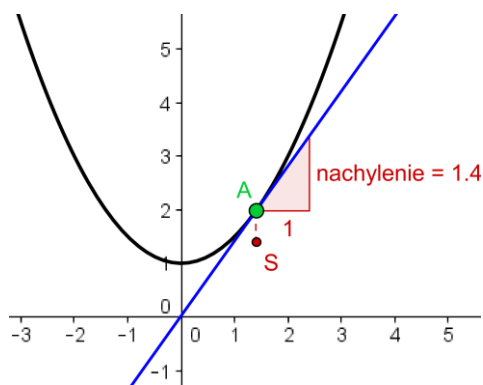
(a) Przesuwaj punkt  $A$  wzdłuż wykresu funkcji i postaraj się przewidzieć kształt ścieżki punktu  $S$ , odpowiadającego nachyleniu wykresu.

(b) Włącz ślad punktu  $S$  aby sprawdzić swoje przewidywania.

Wskazówka: Kliknij prawy przycisk myszki na punkcie  $S$  (MacOS: Ctrl-klik) i zaznacz *Ślad Włączony*.

(c) Znajdź równanie otrzymanej funkcji nachylenia. Wprowadź ją i przesuwaj punkt  $A$ . Jeśli równanie funkcji jest poprawne to punkt  $S$  powinien przesunąć się jej wykresie.

(d) Zmień równanie wyjściowej funkcji wielomianowej, żeby zaproponować nowe zadanie.





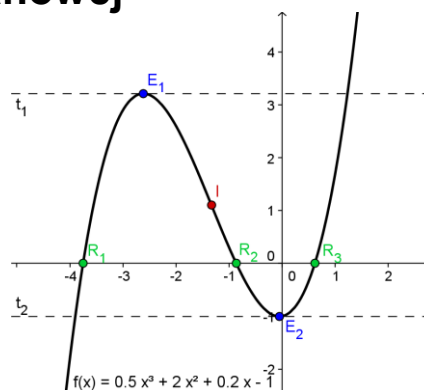
## Badanie własności funkcji wielomianowej

### Przygotowania


- Otwórz nowe okno w *Geogebra*.
- Przełącz *Widoki* na –



Algebra & Grafika.



### Kroki konstrukcji




1	Wprowadź funkcję wielomianową trzeciego stopnia: $f(x) = 0.5x^3 + 2x^2 + 0.2x - 1$ .
2	Wprowadź pierwiastki wielomianu: $R = \text{Pierwiastek}[f]$ <u>Wskazówka:</u> Jeśli pierwiastków jest więcej to GeoGebra do nazwy R dopisze indeksy (np. $R_1, R_2, R_3$ ).
3	Wprowadź ekstrema funkcji $f$ : $E = \text{Ekstremum}[f]$ .
4	 Utwórz styczne do wykresu $f$ w punktach $E_1$ i $E_2$
5	Wprowadź punkty przegięcia $f$ : $I = \text{PunktPrzegięcia}[f]$

Wskazówka: Możesz zmienić własności obiektów (np. zmienić kolory punktów, styl stycznej, pokazać nazwę i wartość funkcji)

## Eksportowanie obrazków do schowka pamięci

Obszar roboczy GeoGebry może być eksportowany jako obrazek do schowka pamięci komputera. Obrazki takie dają się łatwo wkleić do dokumentu lub prezentacji, dzięki czemu można uatrakcyjnić testy, quizy, notatki czy gry matematyczne.

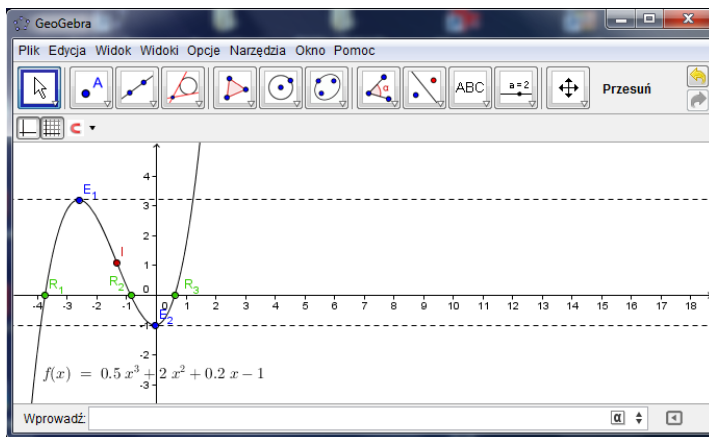
GeoGebra eksportuje cały obszar roboczy Widoku Grafiki. W związku z tym warto zmniejszyć okno GeoGebry aby rysunek nie zajmował niepotrzebnej przestrzeni.

- Przesuń rysunek (lub jego część) to lewego górnego narożnika używając narzędzia  *Przemieszczaj obszar roboczy* (lub skrótu Ctrl).
- Wskazówka: Możesz także użyć narzędzi  *Powiększ* i  *Pomniejsz* aby przygotować rysunek do eksportu.
- Zredukuj rozmiary okna GeoGebry przeciągając myszką jego prawy dolny róg (patrz rysunek poniżej)

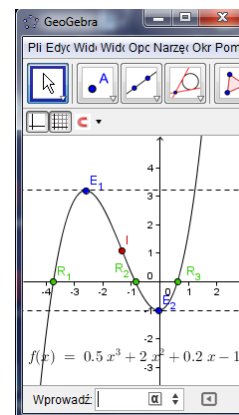




**Wskazówka:** Cursor myszki zmienia kształt gdy znajdzie się nad lub w pobliżu krawędzi okna lub narożnika.



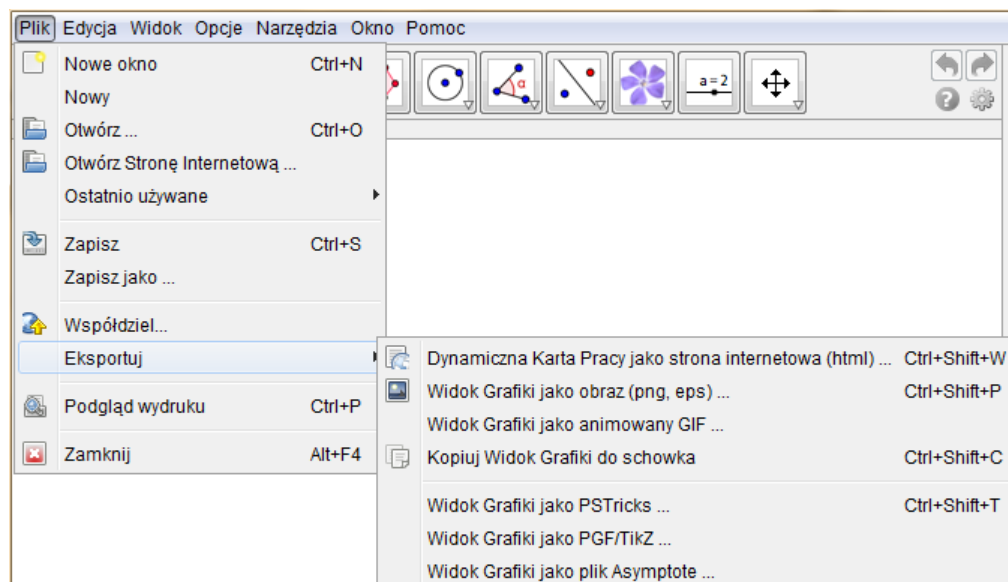
GeoGebra – okno przed zmniejszeniem



GeoGebra – okno po zmniejszeniu

Aby eksportować rysunek do pamięci podręcznej należy w menu *Plik* wybrać polecenie

- *Eksportuj - Kopiuj Widok Grafiki do schowka.*  
**Wskazówka:** Możesz także użyć kombinacji klawiszy *Ctrl + Shift + C* (MacOS: *Cmd+Shift+C*).
- Twój rysunek jest teraz przechowywany w pamięci podręcznej i może być wklejony edytora tekstu lub prezentacji.



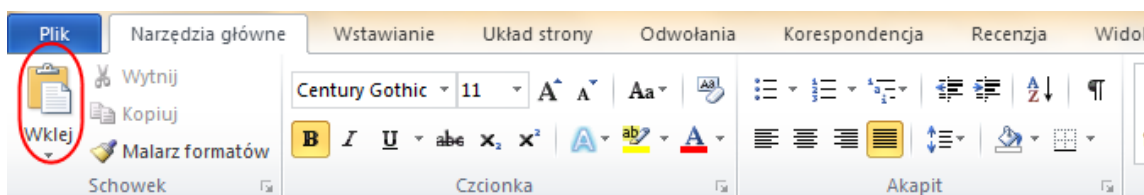


## Wklejanie obrazka do dokumentu edytora tekstowego

### Wklejanie obrazka ze schowka do MS Word

Po wykonaniu eksportu obrazka z GeoGebry do schowka pamięci możesz wkleić go z pamięci do dokumentu tekstowego (np. MS Word).

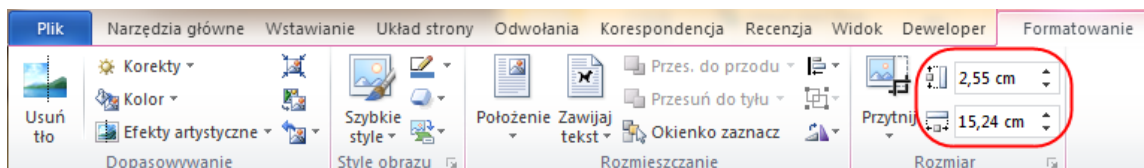
- Otwórz plik tekstowy
- Z zakładki *Narzędzia główne* wybierz *Wklej*. Obrazek zostanie wklejony w pozycji kursora.  
Podpowiedź: Możesz zamiennie użyć kombinacji klawiszy *Ctrl + V* (MacOS: *Cmd + V*).



### Zmniejszenie wymiarów obrazka w MS Word

Jeśli to konieczne możesz zmniejszyć wymiary obrazka w MS Word:

- Kliknij dwukrotnie myszką na obrazek
- Zmień wysokość/ szerokość obrazka używając zestawu *Rozmiar* po prawej stronie paska narzędzi.
- Kliknij OK.

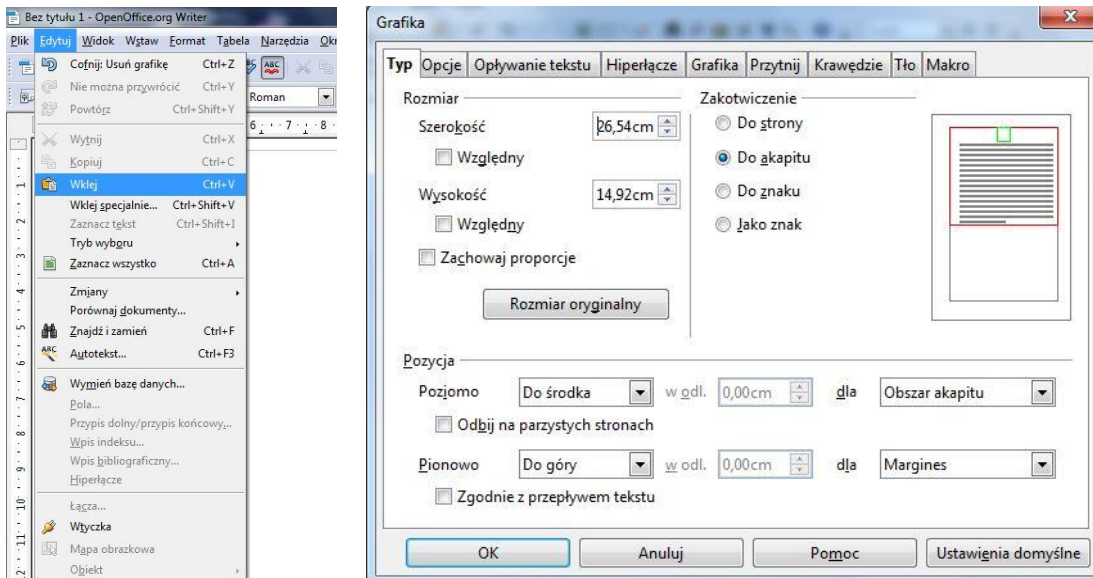


Uwaga: Zmieniając rozmiary obrazka, zmieniasz jego skalę. Jeśli chcesz zachować wymiary (np. uczniowie mają mierzyć długości) to upewnij się, że rozmiary są ustawione na 100%.

Uwaga: Jeśli obrazek jest za duży, żeby zmieścić się na stronie, MS Word automatycznie go zmniejszy i tym samym zmieni jego skalę.

### Wklejanie obrazka ze schowka do OpenOffice.org Writer

- Otwórz nowy plik tekstowy
- Z menu *Edytuj* wybierz *Wklej* lub użyj kombinacji klawiszy *Ctrl-V*.



## Zmniejszanie rozmiarów obrazka w OpenOffice.org Writer

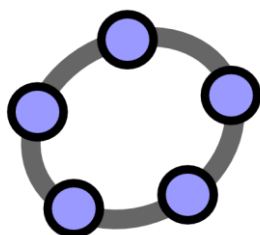
- Kliknij dwukrotnie na wklejony obrazek.
- Wybierz zakładkę *Typ* w okienku *Grafika*.
- Zmień szerokość/wysokość obrazka.
- Kliknij *OK*.

## Zadanie Dnia: Tworzenie karty pracy dla uczniów

Wybierz jakiś temat z matematyki i opracuj kartę pracy/konspekt/ sprawdzian dla swoich uczniów.

- Utwórz rysunek w GeoGebra i eksportuj go do schowka pamięci .
- Wstaw obrazek do pliku edytora tekstowego.
- Dodaj wyjaśnienia/polecenia/zadania dla uczniów.





# Przekształcenia i Wstawianie Obrazków do Widoku Grafiki

GeoGebra | Warsztaty | Część 4

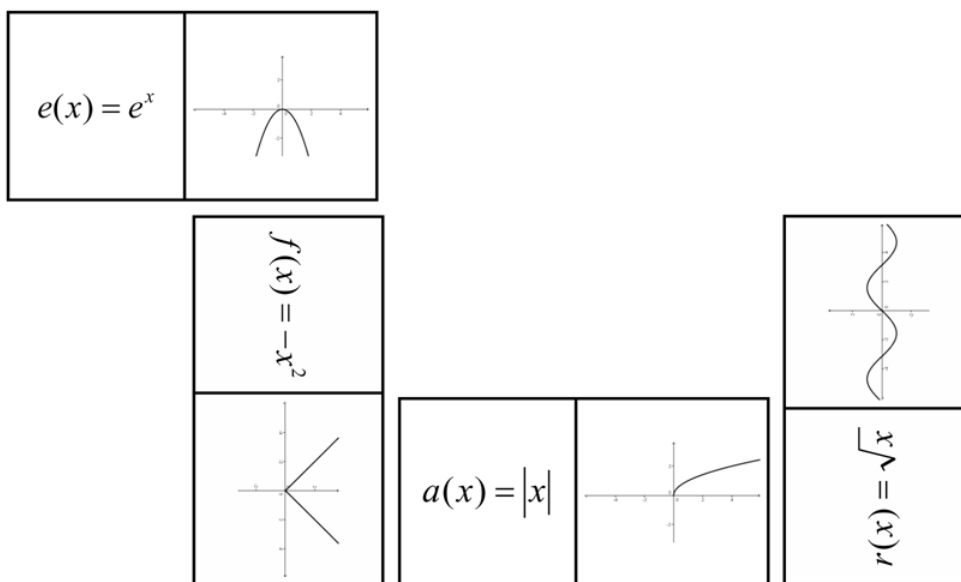
## Spis treści

4.1.	<a href="#">TWORZENIE GRY DOMINO Z WYKRESAMI FUNKCJI</a>	46
4.2.	<a href="#">TWORZENIE FIGUR DO GRY PAMIĘTACZEK</a>	47
4.3.	<a href="#">BADANIE SYMETRII W GEOGEBRZE</a>	49
4.4.	<a href="#">SKALOWANIE, ODBICIE SYMETRYCZNE I ZNIEKSZTAŁCENIE OBRAZKA</a>	51
4.5.	<a href="#">BADANIE WŁASNOŚCI SYMETRII OSIOWEJ</a>	53
4.6.	<a href="#">TRANSLACJA OBRAZKA</a>	54
4.7.	<a href="#">OBRACANIE WIEŁOKĄTÓW</a>	55
4.8.	<a href="#">ZADANIE DNIA: POKRYWANIE PŁASZCZYZNY WIEŁOKĄTAMI FOREMNymi - PARKIETAŻE</a>	58




## Tworzenie gry Domino z wykresami funkcji




Przy okazji tego zadania przećwiczmy eksportowanie wykresu funkcji do schowka pamięci i wklejanie go do edytora tekstowego. Przygotujemy karty do gry 'Domino Funkcje'. Przed rozpoczęciem, upewnij się, czy umiesz wprowadzać różne typy funkcji.



### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki –  Algebra & Grafika.

### Polecenia do wykonania w GeoGebra

1	Wprowadź dowolną funkcję. Przykład: $e(x) = \exp(x)$
2	 Przesuń obszar roboczy  tak by wykres funkcji znalazł się w prawym górnym rogu okna <i>Widoku Grafiki</i> .
3	Zmniejsz okno GeoGebry tak by widoczna była tylko jego część z wykresem w <i>Widoku Grafiki</i> .
4	Wyeksportuj <i>Widok Grafiki</i> do schowka. <u>Wskazówka</u> : Menu Plik– Eksportuj –  Kopiuj Widok Grafiki do schowka



## Polecenia do wykonania w programie MS Word

1	Otwórz nowy dokument tekstowy (np. MS Word).
2	Utwórz tabelę o dwóch kolumnach i kilku wierszach. <u>Wskazówka</u> : Menu <i>Wstawianie</i> – <i>Tabela...</i>
3	Podświetl całą tabelę (wszystkie komórki) i otwórz okno dialogowe <i>Właściwości Tabeli</i> . <u>Wskazówka</u> : kliknij prawym przyciskiem myszki – i z menu kontekstowego wybierz <i>Właściwości Tabeli ...</i>
4	Kliknij na zakładkę <i>Wiersz</i> określ wysokości wpisując 5 cm.
5	Kliknij na zakładkę <i>Kolumna</i> określ szerokość wpisując 5 cm.
6	Kliknij na zakładkę <i>Komórka</i> i wybierz wyrównanie w pionie <i>Do środka</i> .
7	Kliknij przycisk <i>OK</i> .
8	Umieść kursor w jednej z komórek. Wklej wykres funkcji ze schowka pamięci (zakładka <i>Narzędzia główne</i> – <i>Wklej</i> lub kombinacja klawiszy <i>Ctrl + V</i> (MacOS: <i>Cmd + V</i> ).
9	Dopasuj rozmiary obrazka jeśli to konieczne. <u>Wskazówka</u> : Kliknij dwukrotnie na obrazek, żeby otworzyć zakładkę <i>Formatowanie</i> a następnie i ustaw <i>Rozmiar</i> dłuższego boku 4,5 cm.
10	W komórce obok komórki z obrazkiem wpisz wzór innej funkcji. <u>Wskazówka</u> : Możesz skorzystać z edytora równań.


Powtórz kroki od 1 do 8 z innymi funkcjami (np. trygonometrycznymi, logarytmicznymi).

Wskazówka: Pamiętaj, żeby funkcja na rysunku była inna niż wzór w komórce obok.

## Tworzenie figur do gry Pamiętaczek


Przy okazji tego zadania przećwiczmy eksportowanie figur geometrycznych do schowka pamięci i wklejanie ich do dokumentu tekstowego aby wykonać karty do gry Pamiętaczek z figurami geometrycznymi (np. kwadratami, trójkątami). Zanim zaczniesz, upewnij się czy umiesz konstruować różne figury geometryczne (np. czworokąty, trójkąty).


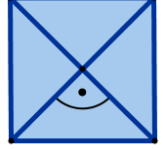
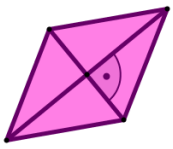

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na–  Geometria



## Polecenia do wykonania w GeoGebra

1	Skonstruuj figurę geometryczną w GeoGebra (np. trójkąt równoramienny).
2	<i>Przełącz Pasek Narzędzi</i> i dopasuj wygląd figury.
3	Przesuń rysunek do lewego górnego rogu i zmniejsz odpowiednio wymiary okna GeoGebry.
4	Wyeksportuj Widok Grafiki do schowka pamięci (menu Plik - Eksportuj – Kopiuj Widok Grafiki do schowka). <u>Wskazówka:</u> Menu Plik – Eksportuj –  Kopiuj Widok Grafiki do schowka.

TRÓJKĄT RÓWNOBOCZNY		KWADRAT	
ROMB		KOŁO	

## Polecenia do wykonania w programie MS Word

1	Otwórz nowy dokument tekstowy (np. MS Word).
2	Utwórz tabelę o dwóch kolumnach i kilku wierszach. <u>Wskazówka:</u> Menu <i>Wstawianie – Tabela...</i>
3	Podświetl całą tabelę (wszystkie komórki) i otwórz okno dialogowe <i>Właściwości Tabeli</i> . <u>Wskazówka:</u> kliknij prawym przyciskiem myszki – i z menu kontekstowego wybierz <i>Właściwości Tabeli ...</i>
4	Kliknij na zakładkę <i>Wiersz</i> określ wysokości wpisując 5 cm.
5	Kliknij na zakładkę <i>Kolumna</i> określ szerokość wpisując 5 cm.
6	Kliknij na zakładkę <i>Komórka</i> i wybierz wyrównanie w pionie <i>Do środka</i> .
7	Kliknij przycisk <i>OK</i> .





8	Umieść kursor w jednej z komórek. Wklej wykres funkcji ze schowka pamięci (zakładka <i>Narzędzia główne</i> – <i>Wklej</i> lub kombinacja klawiszy <i>Ctrl + V</i> (MacOS: <i>Cmd + V</i> ).
9	Dopasuj rozmiary obrazka jeśli to konieczne. <u>Wskazówka</u> : Kliknij dwukrotnie na obrazek, żeby otworzyć zakładkę <i>Formatowanie</i> a następnie i ustaw <i>Rozmiar</i> dłuższego boku 4,5 cm.
10	W innej komórce tabeli wpisz nazwę figury.

Powtórz kroki od 1 do 10 dla innych figur (np. równoległobok, koło).

Wskazówka: Upewnij się czy umieściłeś wszystkie rysunki i ich nazwy na kartach Pamiętaczka.

## Badanie symetrii w GeoGebra

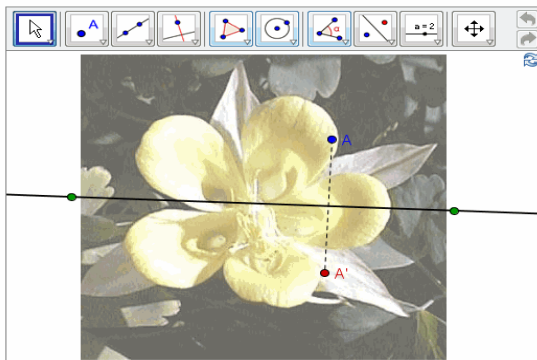
### Powrót do szkoły...

Otwórz arkusz dynamiczny [Rysunek Narzedzie Symetria.html](#). Postępując zgodnie z instrukcjami arkusza dowiesz się w jaki sposób można zainspirować uczniów do poznawania osi symetrii kwiatu.

Wskazówka: W dalszej części zajęć dowiesz się jak utworzyć taki dynamiczny arkusz.

#### Osie Symetrii

Na rysunku punkt A' jest symetrycznym odbiciem punktu A względem widocznej prostej.



1. Przesuwaj punkt A wzdłuż obrzeża kwiatu. Co zauważasz? Zannotuj swoje spostrzeżenia
2. Ile osi symetrii ma kwiat na obrazku?  
Podpowiedź: Przeciągnij myszką **zielone punkty**, żeby zmienić pozycję prostej. Powtórz pierwszy krok dla różnych pozycji prostej.
3. Wykonaj szkic rysunku zamieszczonego w arkuszu, razem z kwiatem i wszystkimi osiami symetrii jakie udało Ci się odkryć.

### Dyskusja

- Jakie korzyści będą mieli twoi uczniowie pracując z tak przygotowanym arkuszem dynamicznym?
- Jakie narzędzia zostały użyte do stworzenia tej konstrukcji?

### Przygotowania

- Upewnij się czy masz zapisany obrazek *kwiatek.jpg*.
- Otwórz nowe okno w GeoGebra.



- Przełącz *Widoki* na – Geometria.

## Nowe narzędzia


	Pokaż / Ukryj Etykietę	Nowe!
	Symetria osiowa <u>Wskazówka:</u> Kliknij na obiekt do odbicia a następnie na prostą, która ma być osią symetrii.	Nowe!

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

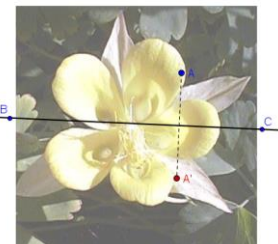
## Kroki konstrukcji

1		Wprowadź nowy punkt A
2		Pokaż etykietę punktu A  Narysuj prostą a przechodzącą przez dwa punkty (oś symetrii)
3		Odbij punkt A względem narysowanej aby otrzymać obraz A'.
4		Narysuj odcinek łączący punkt A z jego obrazem A'.
5		Zahacz polecenie Ślad włączony dla punktów A and A'.
6		<u>Wskazówka:</u> Kliknij prawym przyciskiem myszki (MacOS: Ctrl – klik) na każdy z punktów punkt i w menu kontekstowym wybierz polecenie Ślad włączony.
7		Przesuwaj punkt A aby narysować figurę dynamiczną.
8		Wstaw obrazek <u>kwiatek.jpg</u> do Widoku grafiki  <u>Wskazówka:</u> Kliknij w dowolnym miejscu widoku Grafiki. Miejsce kliknięcia wskazuje gdzie ma być lewy dolny narożnik obrazka.
9		Dopasuj pozycję wstawionego obrazka.
10		Umieść obrazek w tle. (Kliknij prawy przycisk myszki i w oknie kontekstowym wybierz <i>Właściwości</i> – zakładka <i>Podstawowe</i> - <i>Obraz w tle</i> ).
11		Zmniejsz Wypełnienie obrazka (menu <i>Edycja</i> - <i>Właściwości</i> – zakładka <i>Styl</i> ). <u>Wskazówka:</u> Po ustawieniu obrazka jako <i>Obraz w tle</i> nie da się zaznaczyć go myszką w <i>Widoku Grafiki</i> . Dlatego, aby zmienić własności obrazka, trzeba użyć menu – <i>Edycja</i> – <i>Właściwości</i> .



**Wskazówki:** Atrybut  *Ślad włączony* ma pewne charakterystyczne własności:


- Obraz śladu jest tymczasowy. Ślad znika po każdym odświeżeniu *Widoku Grafiki*.
- Śladu nie można zapisać i nie ma go w Widoku Algebry.
- Aby usunąć ślad, trzeba odświeżyć *Widok* (menu *Widok* – *Odśwież widoki* lub kombinacja klawiszów *Ctrl + F*.  
*MacOS: Cmd+F*).



## Skalowanie, odbicie symetryczne i zniekształcenie Obrazka





W tym ćwiczeniu nauczymy się jak wyskalować wstawiony obrazek do danych rozmiarów i jak stosować przekształcenia do obrazków w GeoGebra.

### Przygotowania

- Upewnij się czy masz na komputerze obrazek [Slonce\\_Palmy.jpg](#).
- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na-  Geometria i wyświetl *Pole Wprowadzania* (menu *Widok* – *Pole Wprowadzania*).



### Kroki konstrukcyjne do symetrii i skalowania obrazka




1		Wstaw obrazek <a href="#">slonce_palmy.jpg</a> w lewej części <i>Widoku Grafiki</i> .
2		Wstaw punkt A blisko lewego dolnego rogu obrazka
3		Ustaw punkt A jako PIERWSZY narożnik obrazka. <u>Wskazówka:</u> W oknie dialogowym <i>Właściwości</i> wybierz obrazek z listy obiektów. Kliknij na zakładkę <i>Pozycja</i> i wybierz punkt A z listy rozwijalnej <i>Narożnik</i> 1.
4		Wprowadź punkt: $B = A + (3, 0)$
5		Ustaw punkt B jako DRUGI narożnik wstawionego. <u>Podpowiedź:</u> Właśnie zmieniłeś szerokość obrazka do 3 cm.
6		Narysuj prostą przechodzącą przez dwa punkty w środkowej części <i>Widoku Grafiki</i> .
7		Odbij obrazek symetrycznie względem prostej. <u>Wskazówka:</u> Możesz zmniejszyć wypełnienie otrzymanego obrazu aby odróżnić go od oryginalnego obrazka (okno dialogowe <i>Właściwości</i> ).



## Powrót do szkoły...

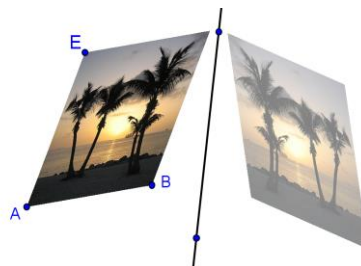
- Przesuń myszką punkt  $A$ . Jak to działa na obrazek?
- Przesuń myszką obrazek i obserwuj jaki ma to wpływ na jego obraz.
- Przesuń oś symetrii przesuując myszką dwa punkty wyznaczające prostą. Jak to działa na obraz?

## Kroki konstrukcji do zniekształcenia obrazka. -

1		Otwórz konstrukcję, którą utworzyłeś w poprzednim ćwiczeniu.
2		Usuń punkt $B$ aby przywrócić oryginalne rozmiary obrazka.
3		Wstaw nowy punkt $B$ blisko prawego dolnego rogu obrazka.
4		Ustaw punkt $B$ jako DRUGI narożnik obrazka. <u>Wskazówka:</u> Możesz teraz zmienić szerokość obrazka poruszając punktem $B$ .
5		Utwórz nowy punkt $E$ blisko lewego górnego rogu obrazka.
6		Ustaw punkt $E$ jako CZWARTY narożnik obrazka

## Powrót do szkoły...

- Jak poruszanie punktem  $E$  działa na obrazek i jego odbicie symetryczne?
- Kształt jakiej figury przyjmuje obrazek i jego odbicie za każdym razem?



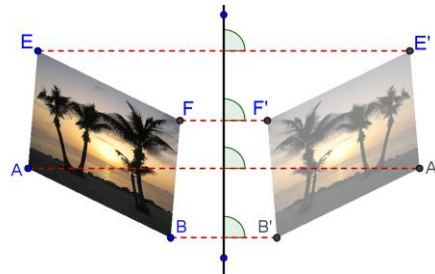


## Badanie własności symetrii osiowej

W tym ćwiczeniu utworzymy konstrukcję dynamiczną, która pozwoli twoim uczniom odkrywać własności symetrii.

### Przygotowania

Zmodyfikujesz utworzoną wcześniej konstrukcję. Jeśli chcesz zachować wersję oryginalną tej konstrukcji, to musisz ją zapisać na komputerze.



### Kroki konstrukcji

1		Otwórz plik utworzony w poprzednim ćwiczeniu 14b.
2		Narysuj odcinek o końcach $A$ i $B$ .
3		Narysuj odcinek o końcach $A$ i $E$ .
4		Narysuj prostą równoległą do $AB$ i przechodzącą przez punkt $E$ .
5		Narysuj prostą równoległą do $AE$ i przechodzącą przez punkt $B$ .
6		Zaznacz punkt $F$ przecięcia się narysowanych prostych.
7		Ukryj obiekty pomocnicze.
8		Odbij cztery narożniki $A$ , $B$ , $E$ i $F$ względem osi symetrii aby uzyskać obrazy $A'$ , $B'$ , $E'$ i $F'$ .
9		Połącz odcinkami punkty z ich obrazami (np. punkty $A$ i $A'$ ).
10		Utwórz kąty między odcinkami a osią symetrii.



### Powrót do szkoły...




- Przesuń narożniki  $A$ ,  $B$ ,  $E$  i  $F$  oryginalnego obrazka. Czy wszystkie punkty możesz je przeciągnąć myszką? Jeśli nie to których nie da się przesunąć i dlaczego?
- Przesuń oś symetrii. Co możesz powiedzieć o kątach między odcinkami łączącymi odpowiednie punkty i ich symetryczne obrazy a osią symetrii.
- Pod jakim kątem przecinają się odcinki łączące punkty i ich symetryczne obrazy z osią symetrii?






## Translacja obrazka

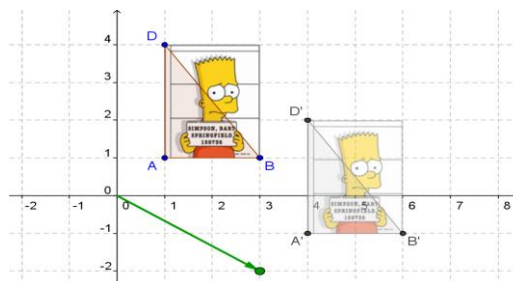
W tym ćwiczeniu posłużymy się następującymi narzędziami. Prze rozpoczęciem właściwej konstrukcji upewnij się, czy umiesz się posługiwać tymi narzędziami.


Wstaw Obrazek  
 $A = (1, 1)$   

Wielokąt o stałym kształcie  
**Nowe!**  
Wektor[O, P]





Wektor między dwoma punktami  
**Nowe!**  

Przesuń obiekt o wektor  
**Nowe!**  

Przesuń  
ABC Wstaw tekst


## Przygotowania

- Upewnij się czy ma obrazek [Bart.png](#) w komputerze.
- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na –  Algebra i Grafika i wyświetl  Siatkę (Przełącz Pasek Narzędzi Widoku grafiki).
- Ustaw Styl Punktu  na Przymocuj do Punktów kratowych (Pasek Narzędzi Widoku grafiki).










## Nowe narzędzia

	Wektor między dwoma punktami <u>Wskazówka:</u> Pierwsze kliknięcie definiuje początek a drugie koniec wektora.	<b>Nowe!</b>
	Przesuń obiekt o wektor <u>Wskazówka:</u> Kliknij na obiekt a następnie na wektor przesunięcia.	<b>Nowe!</b>
	Wielokąt o stałym kształcie <u>Wskazówka:</u> Zaznacz wszystkie wierzchołki i na koniec kliknij na pierwszy wierzchołek. W wyniku powstanie wielokąt, który nie zmienia kształtu gdy się nim porusza. Można go przesunąć i obracać przeciągając dwa widoczne wierzchołki. .	<b>Nowe!</b>

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy*  jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.











## Kroki konstrukcji

1		Wstaw obrazek <a href="#">Bart.png</a> w I ćwiartce układu współrzędnych..
2		Utwórz punkty $A = (1, 1)$ , $B = (3, 1)$ i $D = (1, 4)$ .
3		Ustaw punkt $A$ jako PIERWSZY, $B$ jako DRUGI, i $D$ jako CZWARTY narożnik obrazka. (Okno dialogowe <i>Właściwości</i> – zakładka <i>Pozycja</i> )
4		Utwórz trójkąt $ABD$ .
5		Utwórz punkty $O = (0, 0)$ i $P = (3, -2)$ .
6		Utwórz wektor $u = \text{Vector}[O, P]$ .  <u>Wskazówka:</u> Możesz także użyć narzędzia <i>Wektor między dwoma punktami</i> .
7		Przesuń obrazek o wektor $u$ korzystając z narzędzia <i>Przesuń obiekt o wektor</i> . <u>Wskazówka</u> Możesz zmniejszyć wypełnienie obrazu.
8		Przesuń narożniki $A$ , $B$ , i $D$ o wektor $u$ aby otrzymać obrazy $A'$ , $B'$ , i $D'$ .
9		Utwórz trójkąt $A'B'D'$ .
10		Ukryj punkt $O$ aby nie można go było przesunąć przez przypadek..
11		Dopasuj odpowiednio kolory i rozmiary obiektów.

## Obracanie wielokątów

W tym ćwiczeniu posłużymy się następującymi narzędziami. Prze rozpoczęciem właściwej konstrukcji upewnij się, czy umiesz się posługiwać tymi narzędziami.

	Wielokąt
	Nowy punkt
	Zmień nazwę
	Suwak

	Obrót obiektu o kąt względem punktu
	Odcinek między dwoma punktami
	Kąt
	Przesuń





## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki na* – *Geometria* i wyświetl układ współrzędnych.
- Kliknij na ikonę *Ustawienia* w prawej części *Paska Narzędzi* i wybierz ikonę *Grafika*, żeby otworzyć okno dialogowe *Właściwości Widoku Grafiki*.
  - W zakładce *Oś X* ustaw odległość na 1.
  - W zakładce *Oś Y* ustaw odległość na 1.

## Nowe narzędzie

	Obrót obiektu o kąt względem punktu	Nowe!
	<u>Wskazówka:</u> Kliknij na obiekt, który ma być obrócony, potem na środek obrotu, i na koniec wprowadź miarę kąta.	

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1		Utwórz dowolny trójkąt $ABC$ w drugiej ćwiartce i rozmieść wierzchołki w punktach przecięcia linii siatki.
2		Wstaw nowy punkt $D$ w początku układu współrzędnych.
3		Zmień nazwę punktu $D$ na $O$ . <u>Wskazówka:</u> GeoGebra daje możliwość 'ekspresowej zmiany nazwy'. Uaktywnij narzędzie <i>Przesuń</i> i zaznacz obiekt. Gdy zaczniesz pisać nową nazwę GeoGebra otworzy okno dialogowe <i>Zmień nazwę</i> .
4		Wstaw suwak dla kąta $\alpha$ . <u>Wskazówka:</u> W oknie dialogowym suwaka zahacz <i>Kąt</i> i ustaw jego <i>miarę na</i> $90^\circ$ . Upewnij się, że nie usunąłeś symbolu stopnia kąta $^\circ$ .
5		Obróć trójkąt $ABC$ wokół punktu $O$ o kąt $\alpha$ . <u>Wskazówka:</u> W oknie dialogowym obrotu zahacz opcję <i>(obróć) przeciwnie do ruchu wskazówek zegara</i> .
6		Narysuj odcinki $AO$ i $A'O$ .
7		Narysuj kąt $AOA'$ . <u>Wskazówka:</u> Zaznacz punkty w kolejności przeciwnej do ruchu wskazówek zegara (punkt pierwszego ramienia, wierzchołek, punkt drugiego ramienia). Ukryj nazwę kąta.

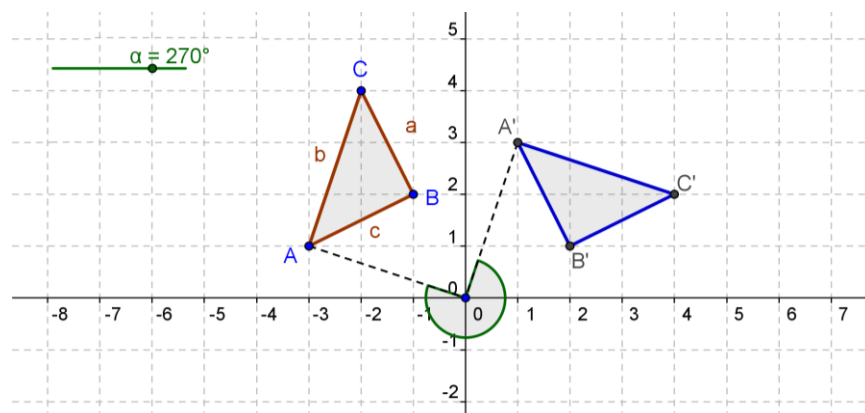




8



Zmień wartość kąta na suwaku i sprawdź obraz trójkąta.



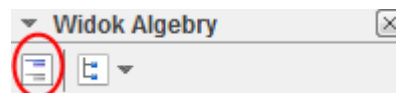
## Ukrywanie obiektów w Widoku Algebry. Obiekty pomocnicze

Poznamy teraz jak 'oczyścić' *Widok Algebry* poprzez przededefiniowanie niektórych obiektów na obiekty pomocnicze i ukrycie ich algebraicznej reprezentacji.

- Wyświetl Widok Algebry

Wskazówka: menu *Widok* – *Algebra*.

- Otwórz *Ustawienia* i okno dialogowe dla *Obiektów*.
- W oknie dialogowym *Ustawienia* zaznacz wszystkie odcinki i w zakładce *Podstawowe* zahacz *Obiekt pomocniczy*.  
Wskazówka: Aby zaznaczyć wszystkie odcinki wystarczy kliknąć na nagłówek *Odcinek*.
- Powtórz ten krok dla trójkątów, kątów o punktu O w Początku układu współrzędnych.  
Wskazówka: W *Widoku Algebry* powinny być widoczne tylko punkty A, B i C oraz ich obrazy A', B' i C'.
- Jeśli przełączysz *Pasek Narzędzi* w *Widoku Algebry* aby uwidocznienie dostępne polecenia, to klikając na przemienną ikonę *Obiekty Pomocnicze* możesz wyświetlać lub ukrywać *Obiekty Pomocnicze* w *Widoku Algebry*.



Uwaga: Dzięki ukryciu obiektów pomocniczych uczniowie będą mogli obserwować współrzędne punktów i ich obrazów nie rozpraszając uwagi algebraiczną reprezentacją innych obiektów.



## Zadanie dnia: pokrywanie płaszczyzny wielokątami foremnymi - Parkietaże

Otwórz arkusz dynamiczny [01\\_Parkietaze\\_Trojkat.html](#). Jest to pierwszy arkusz z dziesięciu arkuszy dynamicznych stanowiących zestaw do badania możliwości wypełniania płaszczyzny wielokątami foremnymi.

Wskazówka: Aby obejrzeć cały zestaw wykorzystaj linki *Strona Następna* | *Poprzednia* w prawym górnym narożniku arkuszy.

### Powrót do szkoły...

- Wykonaj polecenia w zestawie arkuszy dynamicznych. Zapisz odpowiedzi na kartce i przedyskutuj je z kolegami.
- Po przerobieniu wszystkich arkuszy w zestawie powinieneś umieć odpowiedzieć na następujące pytania:
  - Jakimi wielokątami foremnymi można wypełnić płaszczyznę?
  - Jakich przekształceń używane są do wypełniania płaszczyzny wielokątami foremnymi?
  - Ile wielokątów spotyka się przy jednym wierzchołku?
- Uzupełnij wartości w tabeli poniżej. Czy zauważasz jakąś regularność. Postaraj się odkryć wzory dla  $n$ -kąta foremnego.

Liczba wierzchołków	Wielokąt		Części trójkątne		Wielokąt
	Wypełnienie jest możliwe tak / nie	# Liczba wielokątów przy jednym wierzchołku	Miara kąta środkowego	Miary kątów wewnętrznych	Miary kątów wewnętrznych
3			---	---	
4					
5					
6					
7					
...	...	...	...	...	...
$n$					

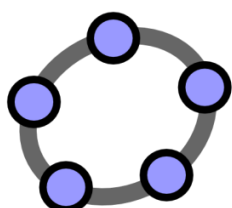
- Sformułuj wniosek, który wyjaśnia dlaczego nie wszystkie wielokąty nadają się do wypełnienia płaszczyzny.



## Pokrywanie płaszczyzny wielokątami – rozwiązanie

Wielokąt			Części trójkątne		Wielokąt
Liczba wierzchołków	Wypełnienie jest możliwe tak / nie	Liczba wielokątów przy jednym wierzchołku	Miara kąta środkowego	Miary kątów wewnętrznych	Miary kątów wewnętrznych
3	tak	6	---	---	$60^\circ$
4	tak	4	$\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$	$\frac{180^\circ - 90^\circ}{2} = 45^\circ$	$2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$
5	nie	---	$\frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$	$\frac{180^\circ - 72^\circ}{2} = 54^\circ$	$2 \cdot 54^\circ = 108^\circ$
6	tak	3	$\frac{360^\circ}{6} = 60^\circ$	$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$	$2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$
7	nie	---	$\frac{360^\circ}{7} \approx 51\frac{3}{7}^\circ$	$\frac{180^\circ - 51\frac{3}{7}^\circ}{2} \approx 64\frac{2}{7}^\circ$	$2 \cdot 64\frac{2}{7}^\circ = 128\frac{4}{7}^\circ$
...	...	...	...	...	...
n	Nie dla $n > 6$	---	$\frac{360^\circ}{n}$	$\frac{180^\circ - \frac{360^\circ}{n}}{2}$	$180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$





## Wstawianie tekstu statycznego i dynamicznego do Widoku Grafiki

GeoGebra | Warsztaty | Część 5

### Spis Treści

5.1.	<a href="#">SYMETRIA OSIOWA W UKŁADZIE WSPÓŁRZĘDNYCH</a>	62
5.2.	<a href="#">INTERPRETACJA GEOMETRYCZNA UKŁADU RÓWNAŃ LINIOWYCH</a>	64
5.3.	<a href="#">WIZUALIZACJA SUMY KĄTÓW W TRÓJKĄCIE</a>	66
5.4.	<a href="#">NOWE NARZĘDZIE</a>	66
5.5.	<a href="#">KONSTRUKCJA TRÓJKĄTA NACHYLENIA</a>	68
5.6.	<a href="#">UŁAMKI DYNAMICZNE I PRZYPINANIE PÓŁ TEKSTOWYCH DO OBIEKTÓW</a>	69
5.7.	<a href="#">ZEGAR MODUŁO 3</a>	70
5.8.	<a href="#">ZADANIE DNIA: WIZUALIZACJA ROZWINIĘCIA KWADRATU SUMY</a>	73



## Symetria osiowa w układzie współrzędnych

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki* na – Algebra & Grafika i wyświetl Siatkę
- W Pasku Narzędzi Widoku Grafiki ustaw Styl Punktu na opcję Przymocuj do punktów Kratowych.

### Kroki konstrukcji

1		Utwórz punkt $A = (3, 1)$ .
2		Utwórz prostą $a$ wpisując w <i>Polu Wprowadzania</i> $a: y = 0$ .
3		Odbij symetrycznie punkt $A$ aby otrzymać punkt $A'$ . <u>Wskazówka:</u> Ustaw ten sam kolor dla prostej $a$ i punktu $A'$ (np. czerwony).
4		Utwórz prostą $b$ wpisując w <i>Polu Wprowadzania</i> $b: x = 0$ .
5		Odbij symetrycznie punkt $A$ aby otrzymać punkt $A_1'$ . <u>Wskazówka:</u> Możesz ustawić ten sam kolor dla prostej $a$ i punktu $A_1'$ (np. niebieski).

### Wstawianie tekstu do Widoku Grafiki

#### Nowe narzędzie

ABC	Wstaw tekst	Nowe!
	<u>Wskazówka:</u> Kliknij w dowolnym miejscu <i>Widoku Grafiki</i> aby wskazać lokalizację tekstu. W oknie dialogowym, które się zaraz pojawi wpisz odpowiedni tekst i zatwierdź klikając OK.	

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

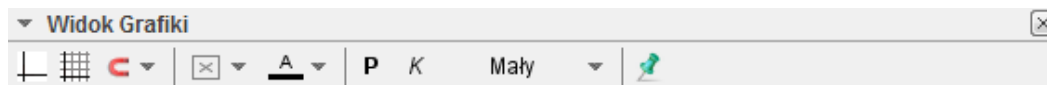
### Wstawianie tekstu statycznego

Wprowadź odpowiedni nagłówek do *Widoku Grafiki* GeoGebry, żeby twoi uczniowie wiedzieli czego dotyczy dynamiczna konstrukcja. W tym celu:

- Uaktywnij narzędzie Wstaw tekst i kliknij myszką gdzieś w górnej części okna roboczego *Widoku Grafiki*.



- W oknie dialogowym, które się pojawi wpisz tekst:  
***Odbicie symetryczne punktu względem osi układu współrzędnych.***
- Dopasuj wygląd tekstu korzystając z *Paska Narzędzi Widoku Grafiki* (np. styl czcionki, rozmiar czcionki, format).

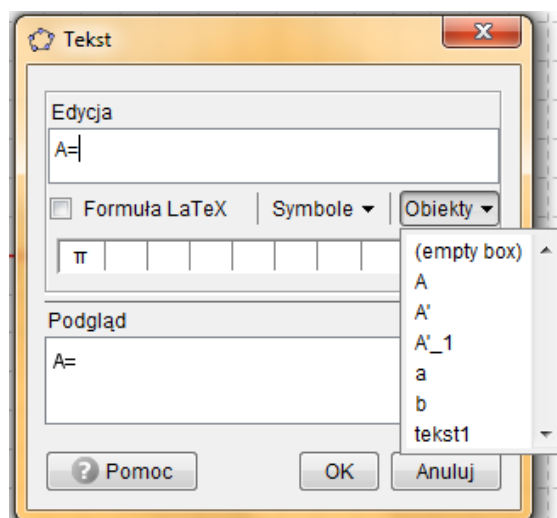


- Dopasuj położenie tekstu za pomocą narzędzia *Przesuń*.
- Osadź tekst tak aby nie można było zmienić jego położenia przez przypadek. (Zbliż kursor do tekstu, kliknij prawym przyciskiem myszki i wybierz z menu kontekstowego *Właściwości obiektu* – zakładka *Podstawowe* – *Osadź obiekt*).

## Wstawianie tekstu dynamicznego

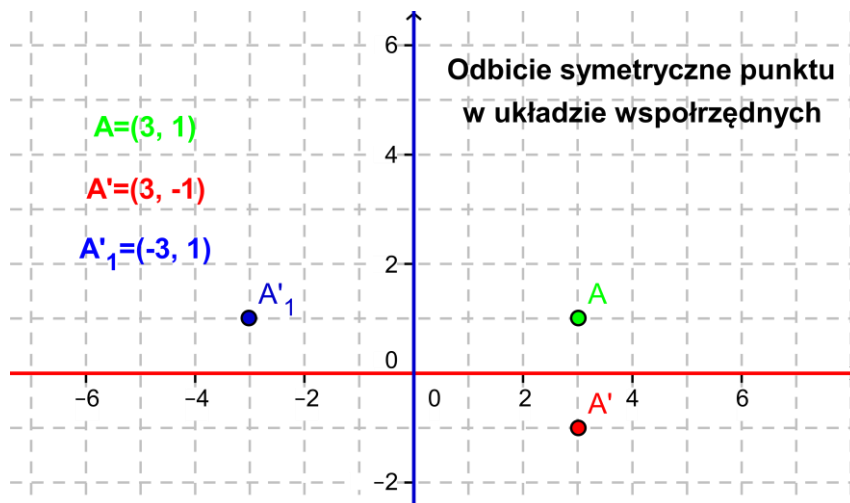
Tekst dynamiczny odnosi się do istniejących obiektów i dostosowuje się automatycznie do modyfikacji, na przykład w zapisie  $A = (3, 1)$  współrzędne zmieniają się gdy tylko punkt  $A$  jest przesuwany.

- Uaktywnij narzędzie *Wstaw tekst* i kliknij myszką w obszarze *Widoku Grafiki*.
- W oknie dialogowym *Tekst*, które się pojawi, wpisz:  $A =$   
Wskazówka: To będzie statyczna część tekstu i nie będzie się zmieniać przy przesuwaniu punktu  $A$ .
- Wstaw dynamiczną część tekstu wybierając myszką punkt  $A$  z listy rozwijanej *Obiekty* okna dialogowego *Tekst*.
- Kliknij OK.



## Wzbogacenie tekstu dynamicznego

- Wstaw dynamiczny tekst, który pokazuje współrzędne obrazów  $A'$  i  $A_1'$  punktu  $A$
- Użyj polecenia *Pomniejsz* zwiększyć zakres punktów płaszczyzny w układzie współrzędnych.  
Wskazówka: Warto dopasować odległość między liniami *Siatki* :
  - Otwórz *Ustawienia* i *Widok Grafiki*.
  - Wybierz w oknie dialogowym zakładkę *Siatka*.
  - Zahacz *Odległość* i w obu polach wpisz wartość 1.
- Zamknij *Widok Algebry* i osadź wszystkie pola tekstowe aby nie można było ich przesunąć przypadkowo.



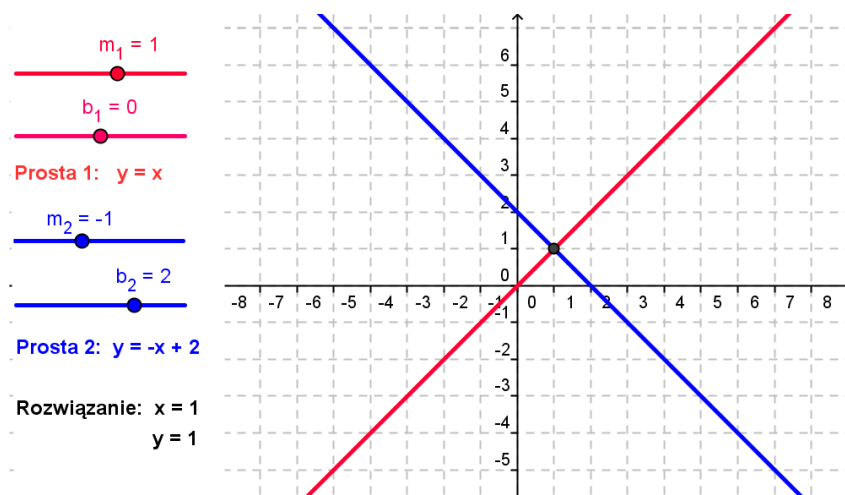
## Zadanie

Ułóż polecenia, które pomogą twoim uczniom odkryć związek między współzrędnymi danego punktu a jego obrazami w symetriach względem osi układu. Wykorzystaj przy tym tekst dynamiczny.

## Interpretacja geometryczna układu równań liniowych

### Przygotowania










- Otwórz nowe okno w GeoGebraze..
- Przełącz Widoki na – Algebra & Grafika i wyświetl Siatkę.







## Kroki konstrukcji

1		Utwórz suwak $m_1$ z domyślnymi ustawieniami. <u>Wskazówka:</u> Wpisując $m_1$ dostajemy literę z indeksem dolnym $m_1$ .
2		Utwórz suwak $b_1$ z domyślnymi ustawieniami.
3		W polu wprowadzania wpisz nazwę i równanie prostej $prosta_1: y = m_1 x + b_1$ .
4		Utwórz suwak $m_2$ z domyślnymi ustawieniami.
5		Utwórz suwak $b_2$ z domyślnymi ustawieniami.
6		W polu wprowadzania wpisz nazwę i równanie prostej $prosta_2: y = m_2 x + b_2$ .
7		Utwórz tekst dynamiczny <i>tekst1</i> : $Prosta_1$ : i wybierz <i>prosta_1</i> z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
8		Utwórz tekst dynamiczny <i>tekst2</i> : $Prosta_1$ : i wybierz <i>prosta_1</i> z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
9		Utwórz punkt $A$ przecięcia się prostych $prosta_1$ i $prosta_2$ . <u>Wskazówka:</u> Możesz zamiennie użyć polecenie $Przecięcie[prosta_1, prosta_2]$ .
10		Utwórz obiekt $odciętax = x(A)$ . <u>Wskazówka:</u> $x(A)$ oznacza pierwszą współrzędną punktu $A$ .
11		Utwórz obiekt $rzędnay = y(A)$ . <u>Wskazówka:</u> $y(A)$ oznacza pierwszą współrzędną punktu $A$ .
12		Utwórz tekst dynamiczny <i>tekst3</i> : Rozwiązanie: $x =$ i wybierz obiekt <i>odciętax</i> z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
13		Utwórz tekst dynamiczny <i>tekst3</i> : Rozwiązanie: $y =$ i wybierz obiekt <i>rzędnay</i> z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
14		Osadź tekst tak by nie można było go przypadkowo przesunąć.

## Zadanie

Utwórz podobną konstrukcję, które pozwoli zinterpretować graficznie rozwiązanie układu równań kwadratowych.

Wskazówka: Możesz użyć składni  $f(x) = \dots$



Uwaga: Tego typu dynamiczną konstrukcją można także zinterpretować równanie z jedną niewiadomą wprowadzając każdą stronę równania w postaci wzoru jednej z dwóch funkcji.

## Wizualizacja sumy kątów w trójkącie

W tym ćwiczeniu posłużymy się następującymi narzędziami.

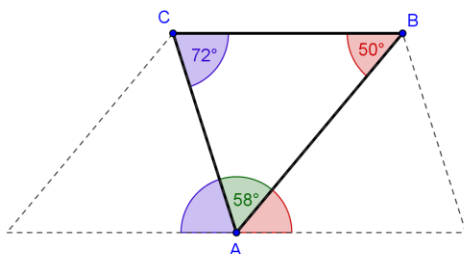
	Wielokąt		Obrót obiektu o kąt względem punktu
	Kąt		Przesuń
	Suwak		Wstaw tekst
	Środek		

Przed rozpoczęciem właściwej konstrukcji upewnij się, czy umiesz się posługiwać tymi narzędziami.

## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Wyświetl Pole Wprowadzania (menu *Widok*).
- Ustaw zaokrąglenie ma 0 miejsc po przecinku (menu *Opcje*– *Zaokrąglenie*).


$$\begin{array}{lll} \delta = 180^\circ & \alpha = 58^\circ & \\ \varepsilon = 180^\circ & \beta = 50^\circ & \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ \\ & \gamma = 72^\circ & \end{array}$$















## Nowe narzędzie

	Środek	Nowe!
	<u>Wskazówka:</u> Zaznacz dwa punkty (końce odcinka), odcinek, okrąg lub krzywą stożkową	



**Wskazówka:** Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy*  jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1		Utwórz trójkąt $ABC$ wskazując wierzchołki w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
2		Utwórz kąty $\alpha$ , $\beta$ i $\gamma$ trójkąta $ABC$ .
3		Utwórz suwak dla kąta $\delta$ ustawiając <i>minimum</i> $0^\circ$ , maksimum $180^\circ$ i <i>krok</i> $10^\circ$ .
4		Utwórz suwak dla kąta $\varepsilon$ ustawiając <i>minimum</i> $0^\circ$ , maksimum $180^\circ$ i <i>krok</i> $10^\circ$ .
5		Utwórz środek $D$ odcinka $AC$ i środek $E$ odcinka $AB$ .
6		Obróć trójkąt $ABC$ wokół punktu $D$ o kąt $\delta$ (zaznaczając - <i>zgodnie z ruchem wskazówek zegara</i> ).
7		Obróć trójkąt $ABC$ wokół punktu $E$ o kąt $\varepsilon$ (zaznaczając - <i>przeciwnie do ruchu wskazówek zegara</i> ).
8		Ustaw wartość na obu suwakach $\delta$ i $\varepsilon$ na $180^\circ$ .
9		Utwórz kąt $\zeta$ wskazując kolejno punkty $A'$ , $C'$ , $B'$ .
10		Utwórz kąt $\eta$ wskazując kolejno punkty $C'_1$ , $B'_1$ , $A'_1$ .
11		Dopasuj wygląd obiektów korzystając z paska <i>Widoku Grafiki</i>  <b>Wskazówka:</b> Kąty przystające powinny być tego samego koloru.
12		Utwórz tekst dynamiczny, pokazujący kąty wewnętrzne i ich wartości (np. $\alpha =$ wybierz obiekt $\alpha$ z rozwijalnej listy <i>Obiekty</i> ).
13		Zdefiniuj sumę miar kątów w trójkącie $\text{sum} = \alpha + \beta + \gamma$
14		Wstaw tekst dynamiczny: $\alpha + \beta + \gamma =$ i wybierz obiekt $\text{sum}$ z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
15		Dopasuj kolory tekstów i kątów. Osadź pola tekstowe tak by nie można ich było przesunąć przypadkowo.



## Konstrukcja trójkąta nachylenia

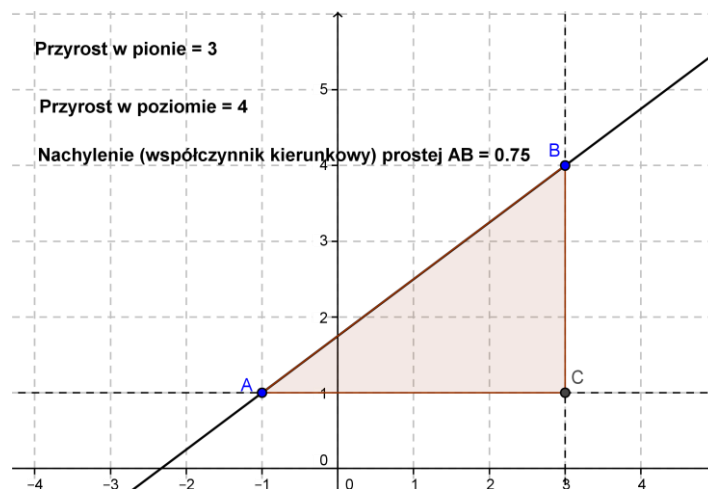
W tym ćwiczeniu wykorzystamy następujące narzędzia i wyrażenia algebraiczne.

	Prosta przechodząca przez dwa punkty
	Proste prostopadłe
	Przecięcie dwóch obiektów
	Wielokąt
$\text{PrzyrostPionowy} = y(B) - y(A)$	

$\text{PrzyrostPoziomy} = x(B) - x(A)$	
$\text{nachylenie} = \frac{\text{PrzyrostPionowy}}{\text{PrzyrostPoziomy}}$	
ABC	Wstaw Tekst
	Środek
	Przesuń

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na Algebra & Grafika i wyświetl Siatkę.
- Ustaw przechwytywanie punktów na *Przymocuj do punktów kratowych* (menu *Opcje*).
- Ustaw Etykietowanie na *Wszystkie nowe obiekty* (menu *Opcje* – *Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

1		Utwórz prostą <i>a</i> przechodzącą przez punkty <i>A</i> i <i>B</i> .
2		Utwórz prostą <i>b</i> przechodzącą przez punkt <i>A</i> i prostopadłą do osi <i>y</i> .
3		Utwórz prostą <i>c</i> przechodzącą przez punkt <i>B</i> i prostopadłą do osi <i>x</i> .
4		Utwórz punkt <i>C</i> przecięcia się prostych <i>b</i> i <i>c</i> .



		<u>Wskazówka</u> : Możesz ukryć proste prostopadłe.
5		Utwórz trójkąt $ACB$ .
6		Ukryj nazwy boków korzystając z paska narzędzi <i>Widoku Grafiki</i> .
7		Zdefiniuj różnicę: $\text{PrzyrostPionowy} = y(B) - y(A)$ . <u>Wskazówka</u> : $y(A)$ oznacza drugą współrzędną punktu $A$ .
8		Zdefiniuj różnicę : $\text{PrzyrostPoziomy} = x(B) - x(A)$ . <u>Wskazówka</u> : $x(B)$ oznacza pierwszą współrzędną punktu $B$ .
9		Wstaw tekst dynamiczny <i>tekst1</i> : $\text{Przyrost w poziomie} =$ wybierz $\text{PrzyrostPoziomy}$ z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
10		Wstaw tekst dynamiczny <i>tekst2</i> : $\text{Przyrost w pionie} =$ wybierz $\text{PrzyrostPionowy}$ z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
11		Zdefiniuj nachylenie prostej $a: \text{nachylenie} = \text{PrzyrostPionowy} / \text{PrzyrostPoziomy}$ .
12		Wstaw tekst dynamiczny <i>tekst</i> : $\text{Nachylenie (współczynnik kierunkowy) prostej } AB =$ wybierz $\text{nachylenie}$ z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
13		Dopracuj wygląd obiektów konstrukcji i osadź pola tekstowe.

## Ułamki dynamiczne i przypinanie pól tekstowych do obiektów

### Wstawianie ułamków dynamicznych

Korzystając z formuł języka  $LaTeX$  można wprowadzać do tekstu wyrażenia takie jak ułamki, pierwiastki i inne symbole matematyczne. W konstrukcji ostatnio utworzonej przedstawimy nachylenie prostej w postaci ułamka zwykłego.

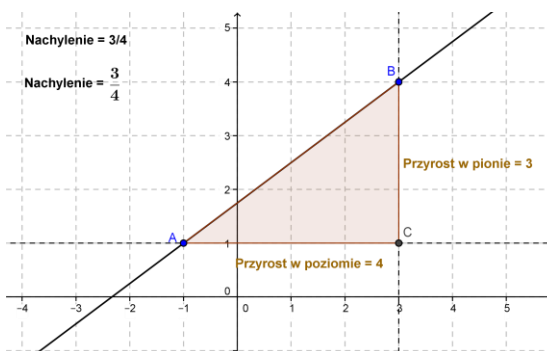
1. Uruchom narzędzie Wstaw *tekst* i kliknij myszką w obszarze *Widoku Grafiki*.
2. Napisz  $\text{nachylenie} =$ .
3. Zaznacz kwadracik *Formuła LaTeX*, wybierz z listy rozwijalnej *Pierwiastki* *ułamki* i wybierz symbol ułamka.
4. Umieść kursor wewnątrz pierwszej pary nawiasów klamrowych, usuń literę  $a$  i wstaw  $\text{PrzyrostPionowy}$  z listy rozwijalnej *Obiekty*.
5. Umieść kursor wewnątrz drugiej pary nawiasów klamrowych, usuń literę  $b$  i wstaw  $\text{PrzyrostPoziomy}$  z listy rozwijalnej *Obiekty*.
6. Kliknij OK.



## Przypinanie pola tekstowego do obiektu

Jeśli przypniemy pole tekstowe do obiektu to gdziekolwiek przemieścimy obiekt tekst przemieści się razem z obiektem. W naszej konstrukcji przypniemy pola tekstowe z tekstami dynamicznymi do boków trójkąta nachylenia.

1. Utwórz punkt  $D$  w środku odcinka  $BC$  korzystając z narzędzia Środek.
2. Utwórz punkt  $E$  w środku odcinka  $AC$  korzystając z narzędzia Środek.
3. Otwórz okno dialogowe *Właściwości* i wybierz *tekst1* (*Przyrost pionowy = ...*). Kliknij na zakładkę *Pozycja* i wybierz punkt  $D$  z listy rozwijalnej *Punkt początkowy*. Otwórz okno dialogowe *Właściwości* i wybierz *tekst1* (*Przyrost pionowy = ...*). Kliknij na zakładkę *Pozycja* i wybierz z listy rozwijalnej punkt  $D$ .
4. Ukryj punkty  $D$  i  $E$ .



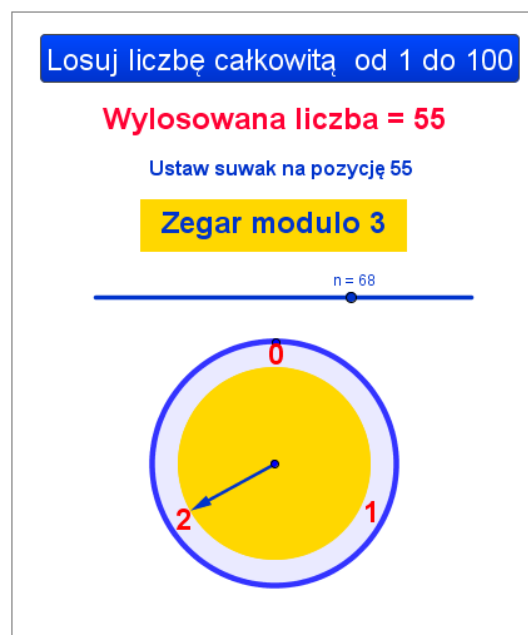
## Zegar modulo 3

Zegar modulo 3 wskazuje resztę z dzielenia danej liczby przez 3. W tej dynamicznej konstrukcji będzie można wylosować liczbę całkowitą między 0 a 100. Przesuwanie punktu po niebieskim suwaku będzie powodować obracanie się wskazówki. Gdy wartość liczby na suwaku będzie równa wylosowanej wskazówka wskaże resztę z dzielenia tej liczby przez 3.

Możesz wcześniej otworzyć plik [ZegarModulo3.html](http://ZegarModulo3.html) aby sprawdzić działanie tego niezwykłego zegara.

### Zegar modulo 3

Zegar pokazuje resztę z dzielenia wylosowanej liczby przez 3.





## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki* na – *Algebra & Grafika*.

## Nowe narzędzia








	Półprosta o danych dwóch punktach	Nowe!
	<u>Wskazówka:</u> Pierwsze kliknięcie definiuje początek półprostej, drugie kliknięcie wskazuje inny punkt na półprostej.	
	Wstaw Przycisk	Nowe!
	<u>Wskazówka:</u> Kliknij w obszarze <i>Widoku Grafiki</i> aby wstawić przycisk. Następnie w oknie dialogowym wpisz <i>Opis</i> przycisku i poniżej skrypt, który się uruchomi po kliknięciu na przycisk.	

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1		Utwórz punkty $A = (0, 0)$ i $B = (0, 1)$ .
2		Utwórz okrąg $c$ o środku $A$ i przechodzący przez punkt $B$ .
3		Powiększ Widok grafiki.
4		Obróć punkt $B$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $A$ o kąt $120^\circ$ aby otrzymać punkt $B'$ .
5		Obróć punkt $B$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara wokół punktu $A$ o kąt $240^\circ$ aby otrzymać punkt $B_1'$ .
6	ABC	Utwórz <i>tekst1</i> 0, <i>tekst2</i> 1 and <i>tekst3</i> 2 . <u>Wskazówka:</u> Możesz zmienić wygląd tekstu (pogrubienie, większa czcionka).
7		Przypnij <i>tekst1</i> do punktu $B$ , <i>tekst2</i> do punktu $B'$ i <i>tekst3</i> do punktu $B_1'$ (okno dialogowe <i>Właściwości</i> ).
8		Utwórz liczbę losową w przedziale od 0 do 100: <code>liczba = Losowa Całkowita[0,100]</code>
9	ABC	Utwórz <i>tekst5</i> : Wylosowana liczba = i wybierz <i>liczba</i> z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
10	ABC	Utwórz <i>tekst6</i> : Zegar modulo 3
11		Wstaw przycisk. W polu <i>Opis</i> wpisz <code>Losujliczbę całkowitą od 0 do 100.</code> W polu <i>GeoGebra Script</i> wpisz: <code>UpdateConstruction[]</code>



		<u>Wskazówka:</u> GeoGebra na nowo uruchomi konstrukcję co w tym wypadku spowoduje ponowne wylosowanie liczby za każdym razem, gdy przycisk zostanie wciśnięty .
12		Utwórz suwak $n$ z ustawieniami: <i>minimum</i> : 0, <i>maksimum</i> 100, z <i>krok</i> 1, <i>szerokość</i> 300 (zakładka <i>Suwak</i> ).
13		Utwórz kąt $BAB''$ o mierze $n \cdot 120^\circ$ , skierowany zgodnie z ruchem wskazówek zegara
14		Utwórz półprostą o początku $A$ i przechodzącą przez punkt $B''$ .
15		Utwórz punkt $D = (0, 0.8)$ .
16		Utwórz okrąg $d$ o środku $A$ i przechodzący przez punkt $D$ .
17		Utwórz punkt $C$ przecięcia się półprostej z okręgiem $d$ .
18		Ukryj okrąg $d$ .
19		Utwórz wektor od $A$ do $C$ .
20		Zmień rozmiar czcionki w oknie GeoGebry na 20 pt.  <u>Wskazówka:</u> Menu Opcje – Rozmiar czcionki
21	ABC	Utwórz tekst7: Ustaw suwak na pozycję i wybierz liczba z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> .
22		Dopasuj wygląd i rozmieszczenie obiektów.



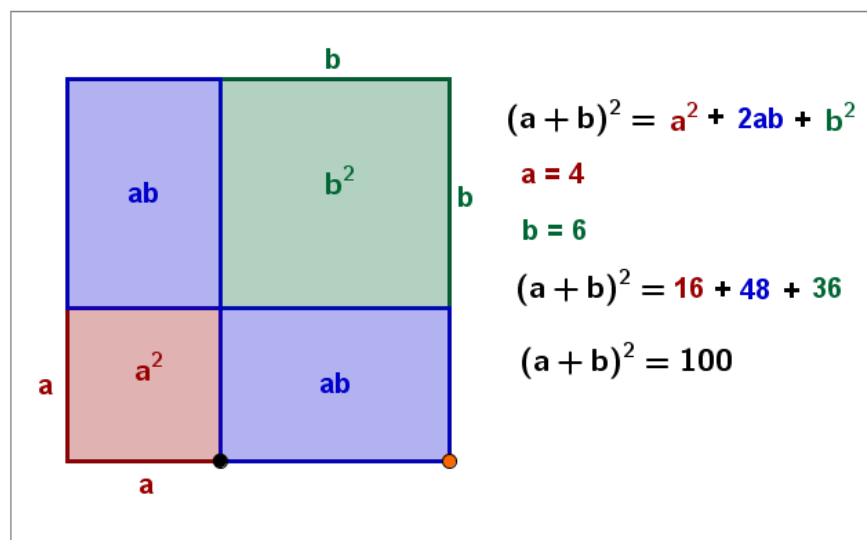


## Zadanie dnia: Wizualizacja rozwinięcia kwadratu sumy

Otwórz dynamiczną kartę pracy [Kwadrat Sumy.html](#). Jest wizualizacja wzoru skróconego mnożenia dla kwadratu sumy  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$  i zawiera tekst dynamiczny, który automatycznie dostosowuje się do zmiennych wartości  $a$  i  $b$ . Odtwórz tę konstrukcję i utwórz z niej dynamiczną kartę pracy.

### Kwadrat sumy

Przeciągnij myszką czarny punkt aby zmienić wartości dla  $a$  i  $b$ .  
Przeciągnij myszką pomarańczowy punkt aby zmienić wielkość kwadratu.

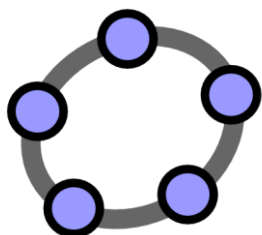


Judith Hohenwarter, Utworzony z [GeoGebra](#)

### Wskazówki:

- W pasku narzędzi *Widoku Grafiki* ustal styl punktu na *Przymocuj do punktów kratowych*.
- Użyj tych samych tekstów statycznych do opisu długości boków przystających i przypnij je do punktów będących ich środkami.
- Użyj tych samych tekstów statycznych do opisu pól różnych części kwadratu i przypnij je do środków odpowiednich części (kwadratowych/prostokątów). Tworząc teksty zahacz Formułę *LaTeX* do zapisu  $^2$ .
- Dodaj tekst dynamiczny ukazujący zmieniające się wartości  $a$  i  $b$ . Jeśli chcesz dopasować kolory wartości do kolorów zmiennych to dla różnych kolorów musisz utworzyć różne pola tekstowe.
- Osadź pola tekstowe aby nie można było ich przypadkowo przemieszczać (okno dialogowe *Właściwości*).





# Tworzenie i Wzbogacanie Arkuszy Dynamicznych z GeoGebra

GeoGebra | Warsztaty | Część 6

## Spis Treści

6.1. <a href="#">WSTĘP: GEOGEBRATUBE I FORUM UŻYTKOWNIKA</a> .....	76
6.2. <a href="#">SUMY DOLNA I GÓRNA</a> .....	78
6.3. <a href="#">TWORZENIE ARKUSZY DYNAMICZNYCH</a> .....	79
6.4. <a href="#">EKSPORT DYNAMICZNEJ KARTY PRACY</a> .....	81
6.5. <a href="#">WIZUALIZACJA NIERÓWNOŚCI TRÓJKĄTA</a> .....	84
6.6. <a href="#">VADEMECUM PROJEKTANTA ARKUSZY DYNAMICZNYCH</a> .....	86
6.7. <a href="#">TWORZENIA PUZZLI 'TANGRAMU'</a> .....	89
6.8. <a href="#">ZADANIE DNIA: ZMODYFIKUJ PUZZLE 'TANGRAMOWE'</a> .....	90



## Wstęp: GeoGebraTube i Forum Użytkownika

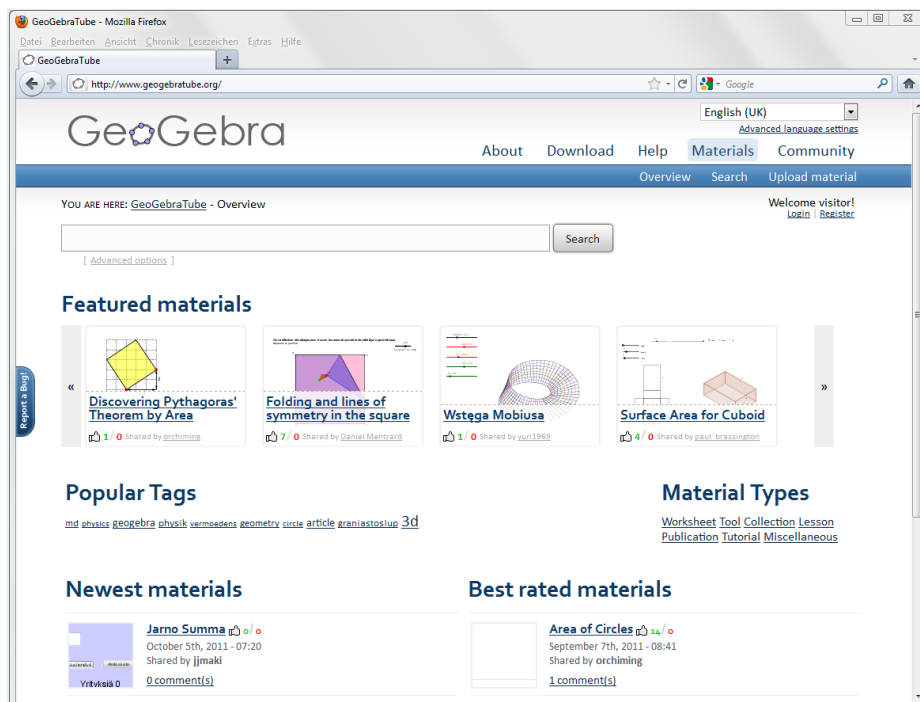
### Arkusze dynamiczne

GeoGebra pozwala na tworzenie własnych interaktywnych materiałów edukacyjnych, tzw. arkuszy dynamicznych, poprzez eksport na stronę internetową konstrukcji utworzonej w programie. Zwykle arkusz dynamiczny zawiera nagłówek, wyjaśnienie, interaktywny aplet oraz zadania i wskazówki dla uczniów.

Uczniowie nie muszą umieć posługiwać się programem GeoGebra żeby pracować z arkuszami dynamicznymi. Interaktywne strony internetowe są niezależne od programu i mogą być dostępne zarówno online jak i z dysku lokalnego.

### GeoGebraTube

Strona internetowa GeoGebraTube (<http://www.geogebra.org/>) jest kopalnią darmowych materiałów instruktażowych (np. arkuszy dynamicznych) tworzonych z całego świata. Materiały te są pogrupowane w różnych zakładkach w zależności od ich zawartości.



Wszystkie materiały dostępne są na stronie GeoGebraTube i podlegają licencji Creative Common Attribution-Share Alike License (<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>). Oznacza to, że można z nich



korzystać za darmo i tworzyć oparciu o nie nowe prace pod warunkiem, że użytkownik zamieści informację, kto jest autorem oryginalnego materiału.

## Forum Użytkowników programu GeoGebra

Strona internetowa Forum Użytkowników programu GeoGebra ([www.geogebra.org/forum](http://www.geogebra.org/forum)) została utworzona z myślą o dodatkowej pomocy, której użytkownicy mogą sobie udzielać wzajemnie. Tworzą ją nauczyciele dla nauczycieli, jedni zamieszczają pytania związane z GeoGebra, inni na nie odpowiadają.

Index page • GeoGebra User Forum - Mozilla Firefox

Index page • GeoGebra User Forum

<http://www.geogebra.org/forum/>

GeoGebra

About Download Help Materials Community

Login Register FAQ Search

GeoGebra User Forum

Last visit was: [View unanswered posts](#) | [View active topics](#)

It is currently Wed Oct 05, 2011 8:44 am [All times are UTC + 1 hour]

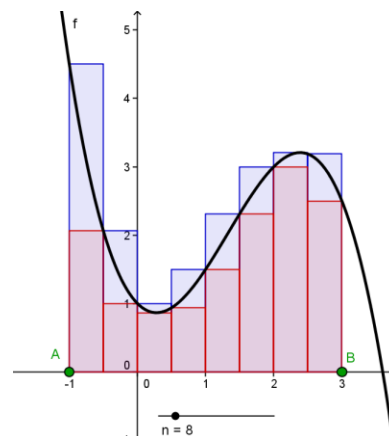
Forum	Topics	Posts	Last post
<b>English speaking users</b>			
<b>Using GeoGebra</b> Questions concerning the use of GeoGebra as a stand-alone application	1972	10458	Wed Oct 05, 2011 7:03 am <a href="#">Birgit Lachner</a> ↗
<b>Technological Questions</b> Installation, dynamic worksheets, GeoGebraWiki, JavaScript, etc.	945	4428	Wed Oct 05, 2011 8:03 am <a href="#">rami</a> ↗
<b>German speaking users</b>			
<b>Bedienung von GeoGebra</b> Fragen rund um die Bedienung von GeoGebra als Einzelanwendung	965	3836	Tue Oct 04, 2011 7:44 pm <a href="#">Birgit Lachner</a> ↗
<b>Technische Fragen</b> Installation, dynamische Arbeitsblätter, GeoGebraWiki, JavaScript usw.	422	1622	Sat Oct 01, 2011 7:28 pm <a href="#">Birgit Lachner</a> ↗
<b>French speaking users/Utilisateurs francophones</b>			
<b>Français Version 3.2</b> Forum pour les utilisateurs de GeoGebra qui parlent français Moderators: <a href="#">Noel Lambert</a> , <a href="#">mlir</a>	1399	9184	Tue Oct 04, 2011 3:30 pm <a href="#">Daniel Menrard</a> ↗
<b>Français Version 4.0</b> Messages relatifs à la version 4.0 Moderators: <a href="#">Noel Lambert</a> , <a href="#">mlir</a>	188	1104	Mon Oct 03, 2011 6:39 pm <a href="#">mlir</a> ↗
<b>Français Version beta 4.2 (avec CAS)</b> Moderator: <a href="#">mlir</a>	13	43	Tue Oct 04, 2011 6:01 pm <a href="#">Noel Lambert</a> ↗

Forum użytkowników GeoGebry składa się z kilku platform dyskusyjnych w różnych językach i dzięki temu użytkownicy mogą wysyłać zapytania i odpowiedzi w rodzimych językach.



## Sumy dolna i górna

W tym ćwiczeniu utworzymy arkusz dynamiczny ilustrujący możliwości wykorzystania sum dolnych i górnych do przybliżania pola obszaru między wykresem funkcji w danym przedziale a osią  $x$ . Może to stanowić wprowadzenie do pojęcia całki oznaczonej.



## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki* na – Algebra & Grafika.

## Kroki Konstrukcji

1		Wprowadź wielomian stopnia trzeciego $f(x) = -0.5x^3 + 2x^2 - x + 1$
2		Zaznacz dwa punkty $A$ i $B$ na osi $x$ . <u>Podpowiedź:</u> Punkty te wyznaczą przedział, do którego będzie ograniczony obszar między wykresem funkcji a osią $x$ .
3		Suwak liczbowy: nazwa $n$ , przedział od 1 do 50, krok 1.
4		Wpisz w Polu Wprowadzania: <code>suma_{gorna} = SumaGorna[f, x(A), x(B), n]</code> <u>Podpowiedź:</u> $x(A)$ oznacza pierwszą współrzędną punktu $A$ . Liczba $n$ określa liczbę prostokątów do policzenia sumy dolnej.
5		Wpisz w Polu Wprowadzania: <code>suma_{dolna} = SumaDolna[f, x(A), x(B), n]</code>
6	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny: Suma górna = i wybierz z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> : <code>suma_{gorna}</code>
7	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny: Suma dolna = i wybierz z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> : <code>suma_{dolna}</code>
8		Wpisz w Polu Wprowadzania: <code>roznica = suma_{gorna} - suma_{dolna}</code>
9	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny: Różnica = i wybierz z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> : <code>roznica</code>
10		Wpisz w Polu Wprowadzania: <code>calka = Integral[f, x(A), x(B)]</code> .
11	ABC	Wstaw tekst dynamiczny <code>Całka =</code> i wybierz z listy rozwijalnej <i>Obiekty</i> : <code>calka</code> .
12		Osadź tekst i suwaki korzystając z okna dialogowego <i>Właściwości</i>



## Zadanie

Użyj suwaka  $n$  aby zmienić liczbę prostokątów do liczenia sumy dolnej i górnej.

1. Porównaj wartości sumy górnej/dolnej z wartością całki. Co zauważasz?
2. Co dzieje się z różnicą między sumą górną a dolną,  
(a) gdy  $n$  jest małe, (b) gdy  $n$  jest duże?

## Tworzenie arkuszy dynamicznych

### Zmniejszanie rozmiaru okna GeoGebry

GeoGebra wyeksportuje *Widok Algebry* i *Widok Grafiki* to dynamicznego arkusza z konstrukcją. Aby zostawić miejsce na wyjaśnienia i zadania w tym arkuszu należy zmniejszyć okno GeoGebry.

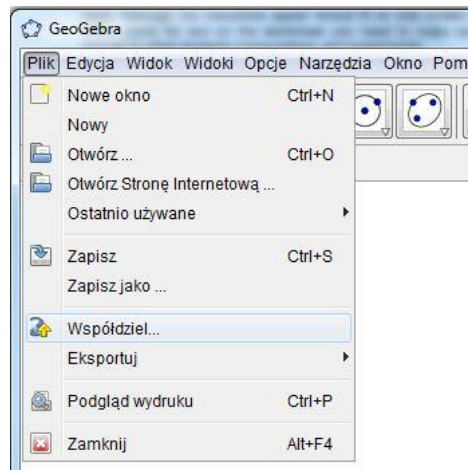
- Jeśli nie chcesz aby arkusz dynamiczny zawierał *Widok Algebry*, musisz ukryć *Widok Algebry* zanim dasz polecenie eksportowania.
- Przesuń figurę (lub wybrane elementy konstrukcji) do prawego górnego rogu *Widoku Grafiki* przy użyciu narzędzia *Przemieszczaj Obszar Roboczy* .  
Podpowiedź: Czasem warto także skorzystać z narzędzi *Powiększ* i *Pomniejsz* przed ostatecznym wyeksportowaniem konstrukcji..
- Zmniejsz wymiary okna GeoGebry przeciągając myszką prawy dolny narożnik tego okna  
Podpowiedź: Wskaźnik zmieni kształt gdy znajdzie się nad krawędzią lub narożnikiem okna GeoGebry.

Uwaga: Mimo, że aplet interaktywny powinien być dopasowany do wielkości ekranu i powinno być jeszcze miejsce na tekst to jednak należy zadbać aby obszar apletu był wystarczająco duży do manipulowania obiektami i wykonywania ćwiczeń przez uczniów.

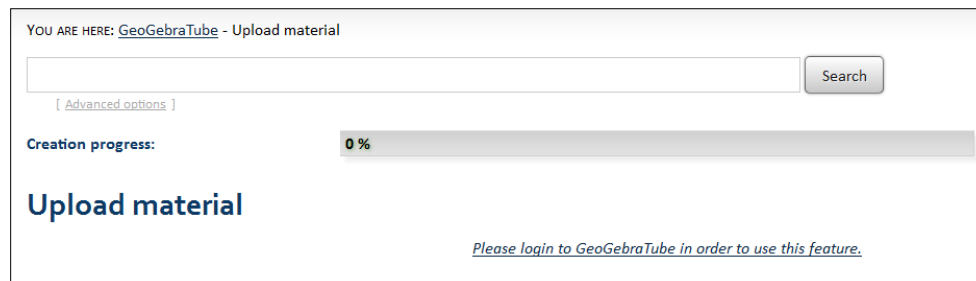
### Przesyłanie do GeoGebraTube

Po dopasowaniu rozmiarów okna GeoGebry jesteś gotowy, żeby wyeksportować swoją konstrukcję do arkusza dynamicznego przy użyciu poleceń zawartych menu *Plik*.

- *Plik*– *Współdziel* ...



- Strona *GeoGebraTube* otwiera się automatycznie. Należy się zalogować (lub zarejestrować jeśli nie masz jeszcze swojego konta) zanim będzie można kontynuować przesyłanie pliku.



- Uzupełnij informacje dla swoich uczniów. Jeśli chcesz to możesz także zaznaczyć, żeby widoczny był pasek narzędzi, pole wprowadzania czy menu. Kliknij *Continue*.
- Napisz krótkie wyjaśnienie dla innych nauczycieli, tak by mogli też skorzystać z twoich materiałów. Informacja ta nie jest widoczna w arkuszu dla ucznia. Wybierz grupę docelową i wybierz słowa kluczowe, które opisują twoje materiały aby ułatwić innym wyszukiwanie.
- Zakończ przesyłanie (*Upload*) przyciskiem *Save*.

Twój arkusz dynamiczny jest zapisany na stronie GeoGebraTube gdzie każdy może z niego skorzystać.

## Podpowiedzi i wskazówki do tworzenia arkuszy dynamicznych

- Po zapisaniu arkusza dynamicznego, automatycznie otworzy się przeglądarka internetowa. Sprawdź tekst, który wpisałeś, jak również działanie interaktywnego apletu. Jeśli chcesz zmienić zawartość arkusza, otwórz z powrotem plik GeoGebry i dokonaj zmian w konstrukcji. Aby zastosować zmiany, wyeksportuj konstrukcję ponownie (możesz użyć tej samej nazwy pliku arkusza nadpisując stary).






Wskazówka: W ten sam sposób możesz zmienić zawartość tekstową arkusza.

- GeoGebra automatycznie zapisuje twoje wpisy w oknie dialogowym eksportu do arkusza dynamicznego. Jeśli chcesz dokonać zmian w trakcie wypełniania pól okna dialogowego, możesz po prostu zamknąć to okno i kontynuować później.
- Zadbaj aby aplet nie był za duży. Uczniowie nie powinni przewijać ekranu między poleceniami i konstrukcją bo to utrudnia naukę.
- Arkusz dynamiczny powinien zmieścić się w całości na ekranie monitora. Jeśli chcesz zamieścić więcej poleceń warto pomyśleć o stworzeniu jeszcze jednego arkusza z tą samą konstrukcją ale innymi poleceniami.

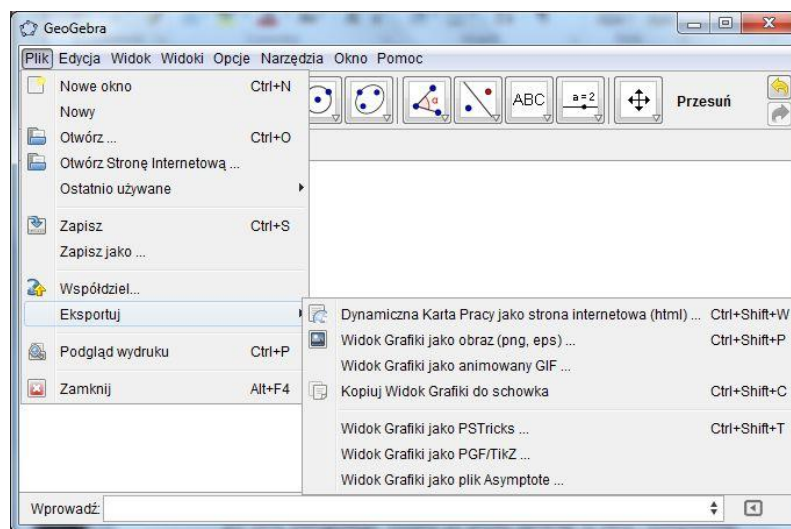
## Eksport dynamicznej karty pracy

### do strony Internetowej (dla Zaawansowanych Użytkowników)

 Zamiast przysyłać materiał na *GeoGebraTube* jest jeszcze możliwość eksportowania dynamicznego arkusza na stronę internetową.

- Wybierz menu *Plik – Eksportuj – Dynamiczna Karta Pracy jako strona internetowa (html)*.

Wskazówka: Możesz także zastosować skrót klawiszowy *Ctrl+Shift+W*.



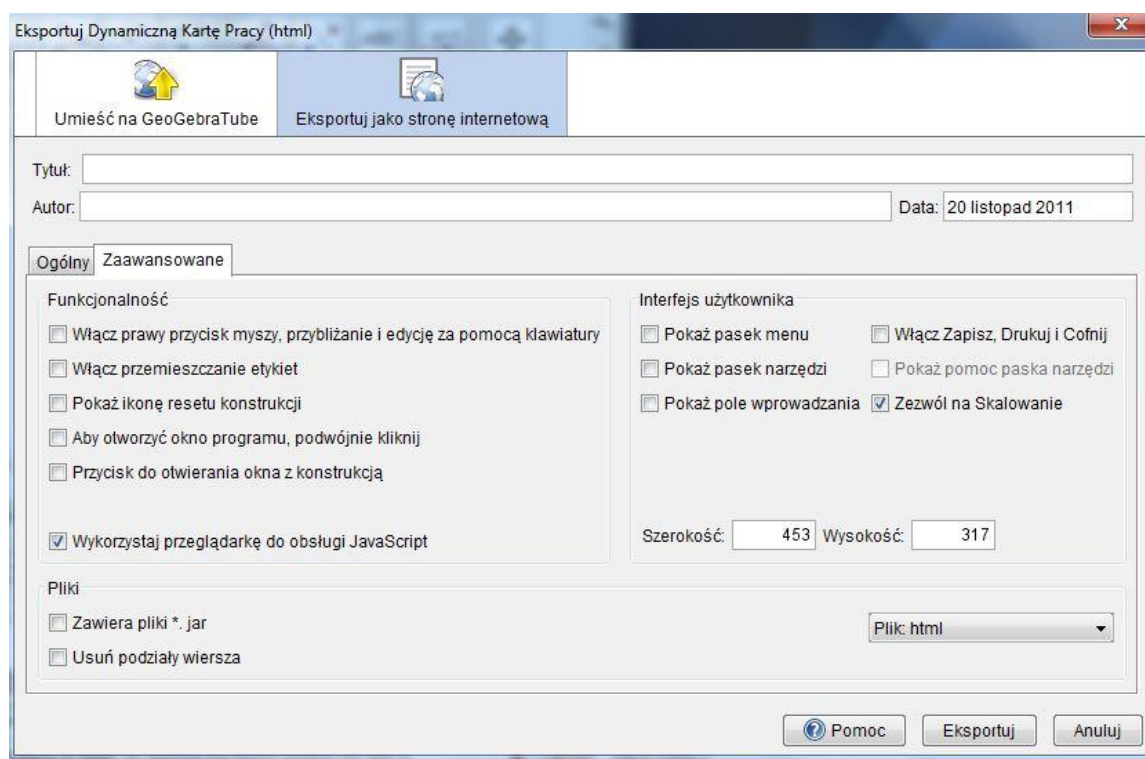
- Uzupełnij pola tekstowe w oknie, które się pojawi w zakładce *Eksportuj jako stronę internetową* (tytuł karty pracy, imię i nazwisko autora, data).
- Napisz krótkie wyjaśnienie na temat dynamicznej konstrukcji zawartej w karcie w polu tekstowym *Tekst przed konstrukcją*.
- Wprowadź zadania i polecenia dla uczniów w polu tekstowym *Tekst poniżej konstrukcji*.



- Kliknij na przycisk Eksportuj, żeby zapisać dynamiczną kartę pracy.  
Wskazówka: GeoGebra utworzy kilka plików, które zawsze muszą być razem w tym samym miejscu aby zapewnić działanie dynamicznej karty pracy. Zalecamy utworzenie nowego folderu (np. *Dynamiczne\_Karty\_Pracy*) w obrębie folderu *GeoGebra\_Wprowadzenie* aby tam zapisywać wszystkie te pliki.

## Wzbogacanie Arkuszy Dynamicznych

Okno dialogowe do polecenia *Eksportuj-Dynamiczna Karta Pracy...* ma dwie zakładki: *Ogólny* i *Zaawansowany*. W ostatnim ćwiczeniu użyliśmy zakładki *Ogólny* aby wprowadzić wyjaśnienia, polecenia i wskazówki przed wykonaniem eksportu. Teraz nauczysz się jak poprawić arkusz przez dodanie różnych atrybutów do dynamicznego arkusza w zakładce *Zaawansowany*.



## Funkcjonalność

- Włącz prawy przycisk myszy, przybliżanie i edycję za pomocą klawiatury:**  
Twoi uczniowie będą mogli – za pomocą kliknięcia prawym przyciskiem myszki lub panelu dotykowego - otworzyć menu kontekstowe obiektu, żeby zmieniać jego właściwości (np. dodaj/ukryj obiekt lub włącz/wyłącz ślad obiektu). Możliwe też będzie korzystanie z powszechnie stosowanych skrótów klawiszowych.
- Włącz przemieszczanie etykiet:** dzięki temu atrybutowi uczniowie będą mogli przesuwować nazwy obiektów.



- *Pokaż ikonę resetu konstrukcji:* W prawym górnym rogu okna apletu będzie widniała ikona, której kliknięcie spowoduje odświeżenie konstrukcji do wyjściowego stanu .
- *Aby otworzyć okno programu, podwójnie kliknij:* Twoi uczniowie, klikając dwukrotnie na aplet, będą mogli otworzyć w pełni funkcjonalne okno z programem GeoGebra.
- *Wykorzystaj przeglądarkę do obsługi JavaScript:* pozwala to przeglądarce poprawnie wyświetlić konstrukcję.

## Interfejs użytkownika

- *Pokaż pasek menu:* W okienku z apletem będzie aktywny pasek menu.
- *Włącz Zapisz, Drukuj i Cofnij:* opcja ta daje możliwość zapisywania, drukowania i cofania kroków konstrukcji.
- *Pokaż pasek narzędzi:* W okienku z apletem będzie aktywny pasek z narzędziami.
- *Pokaż pomoc paska narzędzi:* W kombinacji z paskiem narzędzi będzie wyświetlana pomoc. Jeśli uczeń skorzysta z jakiegoś narzędzia będzie wyświetlany tekst z opisem jak go używać. Opis będzie widoczny na poziomie paska narzędzi po prawej stronie.
- *Pokaż pole wprowadzania:* W dolnej części obszaru z apletem będzie widniało Pole Wprowadzania, w którym twoi uczniowie będą mogli wpisywać wyrażenia algebraiczne i polecenia.
- *Zezwól na Skalowanie:* można powiększać lub pomniejszać obraz w obrębie przeglądarki tak by przeskalować konstrukcję.
- *Szerokość i wysokość (apletu):* Tu możesz zmodyfikować szerokość i wysokość okna z interaktywnym apletem.

**Uwaga:** Jeśli za bardzo zmniejszysz wymiary apletu, to pewne ważne elementy konstrukcji w aplecie, mogą stać się niewidoczne dla twoich uczniów.

**Wskazówka:** Jeśli włączysz polecenie *Pokaż pasek menu* lub *narzędzi*, czy też *pole wprowadzania*, to warto dostosować do tego wysokość interaktywnego apletu.

## Pliki

- Zawiera pliki \*.jar: tworzy nie tylko plik html ale także pliki z rozszerzeniem \*.jar
- Usuń podziały wiersza: usuwa podziały linii jeśli takie występują.
- Lista rozwijalna: możesz wybrać eksport do *pliku html*, lub do schowka *MediaWiki*, *GeoGebraGadżet* lub *platformy Moodle*.



## Zadanie


Wykorzystaj konstrukcję dynamiczną utworzoną w poprzednim ćwiczeniu i wyeksportuj ją do postaci arkusza dynamicznego dodając odpowiednie objaśnienia, komentarz i polecenia. Użyj zakładki Zawansowane, żeby wypróbować różne opcje, sprawdzając jednocześnie jaki ma to wpływ na działanie apletu w arkuszu dynamicznym.

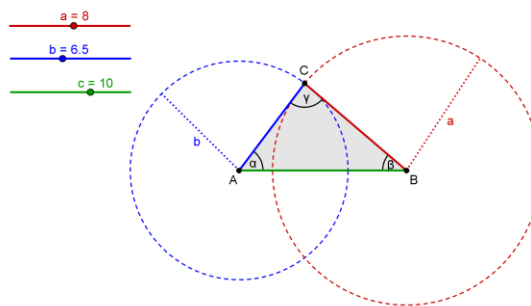
## Wizualizacja nierówności trójkąta

Utworzymy teraz dynamiczny arkusz ilustrujący konstrukcję trójkąta o danych długościach boków  $a$ ,  $b$  i  $c$ . Arkusz ten ma na celu także pomóc uczniom odkryć nierówności trójkąta.

Uwaga: Nierówności trójkąta  $a + b > c$ ,  $b + c > a$ , i  $a + c > b$  mówią o tym, że suma długości dowolnych dwóch boków trójkąta musi być większa od długości trzeciego boku. Jeśli któraś z nierówności nie jest spełniona konstrukcja trójkąta jest niemożliwa.


## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebraze.
- Przełącz *Widoki* na —  Geometria.



## Nowe narzędzia

	<b>Odcinek z punktu o danej długości</b>	<b>Nowe!</b>
	<u>Wskazówka:</u> Pierwsze kliknięcie definiuje pierwszy koniec odcinka. W polu tekstowym, które się pojawi wpisujemy długość odcinka.	
	<b>Okrąg o danym środku i promieniu</b>	<b>Nowe!</b>
	<u>Wskazówka:</u> Pierwsze kliknięcie definiuje środek okręgu. W polu tekstowym, które się pojawi wpisujemy długość promienia.	

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy*  jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.



## Kroki konstrukcji


1		Wstaw suwaki $a$ , $b$ , i $c$ dla długości boków.
2		Ustaw wartości suwaków: $a = 8$ , $b = 6.5$ , i $c = 10$ .
3		Wstaw odcinek $d$ o danej długości $c$ . <u>Uwaga:</u> Punkty $A$ i $B$ są końcami odcinka.
4		Narysuj okrąg $e$ o środku $A$ i promieniu $b$ .
5		Narysuj okrąg $f$ o środku $B$ i promieniu $a$ .
6		Wstaw punkt $C$ w jednym z punktów przecięcia się okręgów $e$ i $f$ .
7		Narysuj trójkąt $ABC$ .
8		Zaznacz kąty wewnętrzne $\alpha$ , $\beta$ , i $\gamma$ trójkąta $ABC$

## Przygotowanie szaty graficznej konstrukcji

Przygotuj konstrukcję trójkąta aby wyeksportować ją do arkusza dynamicznego.

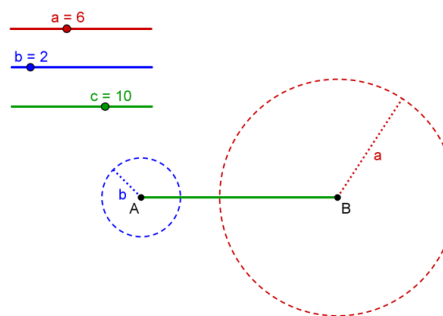
9		Wstaw punkt $D$ na okręgu $e$ .
10		Narysuj odcinek $g$ między punktami $A$ i $D$ .
11		Zaznacz środek $E$ odcinka $g$ .
12		Wprowadź <i>text1</i> : " $b$ " i przypisz go do punktu $E$ .
13		Wstaw punkt $F$ na okręgu $f$ .
14		Narysuj odcinek $h$ między punktami $B$ i $F$ .
15		Zaznacz środek $G$ odcinka $h$
16		Wprowadź <i>text2</i> : " $a$ " i przypisz go do punktu $G$
17		Dopasuj kolory odpowiednich obiektów.
18		Pokaż <i>Pasek nawigacji etapów konstrukcji</i> (menu <i>Widok</i> ).
19		Otwórz protokół konstrukcji i pokaż kolumnę <i>Punkt przerwania</i> (menu <i>Widok</i> w oknie dialogowym <i>Protokołu konstrukcji</i> )
20		Wyświetl <i>Punkty przerwania</i>



21		Zmień kolejność kroków konstrukcji tak by promienie okręgów i przypisane do nich teksty pokazywały się w tym samym czasie. <u>Wskazówka:</u> możesz także ustawić kilka innych punktów przzerwania (np. aby pokazać wszystkie suwaki w tym samym czasie) .
22		W menu <i>Widok</i> okna <i>dialogowego Protokołu Konstrukcji</i> zaznacz polecenie <i>Pokaż tylko punkty przzerwania</i> .

## Zadania

- (a) Wyeksportuj konstrukcję trójkąta do arkusza dynamicznego.
- (b) Ułóż tekst objaśniający tematykę i polecenia, które pozwolą uczniom prześledzić proces konstrukcji oraz pomogą odkryć nierówności trójkąta poprzez modyfikowanie danych długości boków na suwakach.



## Vademecum projektanta arkuszy dynamicznych

Następujące wskazówki dotyczące projektowania arkuszy dynamicznych są wynikiem ewaluacji związanej z formatowaniem arkuszy dynamicznych tworzonych przez nauczycieli w trakcie naszych warsztatów NSF MSP jesienią 2006 i wiosną 2007. Przewodnik bazuje na zasadach projektowania multimediów edukacyjnych, zaproponowanych przez Clarka i Mayera<sup>1</sup>.

Przewodnik stanowi podsumowanie, którego celem jest uniknięcie przez nauczycieli często popełnianych błędów w trakcie tworzenia arkuszy dynamicznych, jak również zwiększenie jakości tych arkuszy dla wypromowania efektywniejszego procesu uczenia się. Mimo, że niektóre wskazówki wydają się oczywiste, nasze doświadczenia pokazały, że są na tyle ważne, by je przedyskutować i szczegółowo wyjaśnić.

Następująca konstrukcja przedstawia całkowicie opracowany arkusz dynamiczny utworzony z GeoGebra. Arkusz ten ma pozwolić uczniom zbadać własności ortocentrum trójkąta. Dzięki możliwości modyfikowania elementów konstrukcji dynamicznej, uczniowie mogą badać ortocentrum wielu różnych trójkątów, a nie tylko jednego przypadku. Niektóre słowa kluczowe w objaśnieniach i pewne zadania są napisane w tym samym kolorze co odpowiednie obiekty konstrukcji. Ponadto zadania są umieszczone obok

<sup>1</sup> Clark, R. and Mayer, R.E. (2002): e-Learning and the Science of Instruction. San Francisco: Pfeiffer, 2002

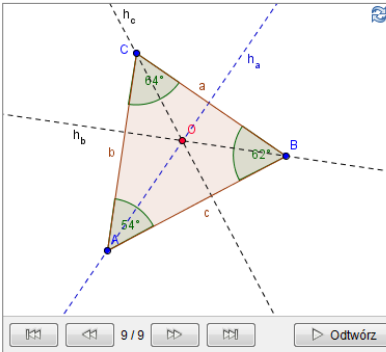




konstrukcji dynamicznej tak, by zmieściły się na jednym ekranie i żeby nie trzeba było przewijać strony.

# Ortocentrum Trójkąta

Poniżej widoczny jest trójkąt ABC wraz z prostymi zawierającymi jego wysokości. Punkt przecięcia się tych prostych nazywany **ortocentrum** trójkąta.



1. Jak byś skonstruował ortocentrum trójkąta? Opisz kolejne kroki konstrukcji.  
Wskazówka. Możesz odtworzyć przedstawioną konstrukcję korzystając z przycisków poniżej.
2. Możesz zmieniać kształt trójkąta przeciągając myszką jego **wierzchołki**. **Ortocentrum** i kąty będą się także przy tym zmieniać. Spróbuj odkryć pozycję ortocentrum gdy:
  - a. wszystkie kąty są ostre,
  - b. jeden z kątów jest rozwarty,
  - c. jeden z kątów jest prosty.

Utworzony z **GeoGebra**

## Vademecum Część 1: Układ w arkuszu dynamicznym

## Unikaj przewijania

Cała zawartość arkusza powinna się zmieścić na jednym ekranie. Uczniowie nie powinni być zmuszani do przewijania strony między poszczególnymi zadaniami. Obecnie powszechnie stosowane rozmiary ekranu to 1024x768 lub 1280x1024 pikseli i to powinno ograniczać rozmiary arkusza. Korzystając z edytora (takiego jak np. jak NVU, można użyć tabel do rozmieszczenia tekstu, obrazków, konstrukcji dynamicznych tak by całość dopasować do rozmiarów ekranu. Jeśli jest to niemożliwe, warto rozważyć zastosowanie arkusza na kilku osobnych stronach.

## Stosuj krótkie objaśnienia

Na początku arkusza dynamicznego powinieneś podać krótkie objaśnienie na temat jego zawartości. Staraj się aby tekst był krótki (nie więcej niż jedno lub dwa zdania) i pisz językiem od siebie.

## Nie zamieszczaj za dużo zadań

Zwykle będziesz dodawał pytania i polecenia, żeby twoi uczniowie aktywnie zapoznawali się z treścią arkusza. Umieszczaj wszystkie polecenia blisko apletu (np. bezpośrednio poniżej. Nie dawaj więcej niż trzy lub cztery pytania/ polecenia aby uniknąć przewijania strony. Jeśli masz więcej poleceń, rozważ rozmieszczenie ich na kilku osobnych stronach.



## **Nie rozpraszaaj uwagi**

Staraj się by arkusz zawierał tylko te elementy, które odnoszą się do tematyki docelowej. Nie stosuj wymyślnego tła lub obrazków dekoracyjnych, ani też nie wprowadzaj muzyki w tle, aby nie odwracać uwagi uczniów od tego co mają zrobić.

## **Vademecum Część 2: Konstrukcje dynamiczne**

### **Interaktywność**

Pozwalaj na tyle interakcji w konstrukcji na ile to jest możliwe. W zasadzie wszystkie widoczne obiekty powinny dać się poruszać lub zmieniać na różne sposoby. Twoja konstrukcja powinna dawać dużo swobody do badania relacji pomiędzy obiektami matematycznymi i zachęcać do odkrywania pojęć.

### **Łatwość w użyciu**

Staraj się by twoje konstrukcje były tak łatwe w użyciu jak to tylko możliwe. Jeśli jakimś obiektem można poruszać, staraj się aby było to czytelne, np. niech wszystkie punkty, które można poruszać są czerwone lub większe niż pozostałe. Jeśli nie chcesz aby jakieś obiekty były przemieszczane, osadź je (np. położenie tekstów, funkcji lub suwaków), i wtedy nie można ich było przypadkowo poruszyć.

### **Kwestia Rozmiarów**

Twoja konstrukcja dynamiczna powinna być na tyle duża aby pozwolić na wprowadzanie zamierzonych modyfikacji, ale na tyle mała by zmieściła się wraz z tekstem, pytaniami i poleceniami na jednym ekranie.

### **Stosowanie tekstów dynamicznych**

Teksty dynamiczne, takie jak długość dającego się zmieniać odcinka, powinny być w pobliżu odpowiednich obiektów w aplecie.

### **Unikaj tekstów statycznych**

Za dużo tekstów statycznych w aplecie może łatwo zaśmieszyć twoją interaktywną konstrukcję. Lepiej jest zamieszczać teksty statyczne, takie jak wyjaśnienia, zadania czy polecenia, na stronie, która zawiera aplet.

### **Widok początkowy**

W momencie otwarcia arkusza dynamicznego, zamieszczone etykiety obiektów jak i ważne informacje, powinny być dobrze widoczne. Na przykład nazwa punktu nie powinna być przecięta przez widniejącą w konstrukcji prostą.





## Vademecum Część 3: Objasnienia i polecenia

### Krótko, jasno i od siebie

Staraj się pisać objaśnienia i polecenia krótko. Używaj takich sformułowań jakich byś używał rozmawiając z uczniem bezpośrednio.

### Mała liczba pytań

Ograniczaj liczbę pytań i poleceń na arkusz do trzech lub czterech aby uniknąć przewijania strony arkusza.

### Stawiaj konkretne pytania

Unikaj pytań ogólnikowych, takich jak „Co zachodzi dla X zawsze?” i jasno przedstaw co uczeń ma zrobić. Na przykład w przypadku pytania „Co dzieje się z obiektem X gdy poruszasz obiektem Y?” dobrze jest polecić aby uczeń robił notatki na kartce. Jeśli chcesz aby uczeń zapisywał odpowiedzi na kartce, napisz to w arkuszu.

### Odnos się do apletu

Twój komentarz powinien wspomagać interakcję z apletem. Na przykład, wyjaśniaj nowe pojęcie w odniesieniu do apletu a nie przez podanie definicji bez żadnego odniesienia. Dodatkowo możesz dopasować kolory słów kluczowych do kolorów odpowiadających im obiektów. To czyni tekst bardziej czytelnym i pomaga uczniom odnajdować różne reprezentacje tego samego obiektu.

### Twoimi odbiorcami są uczniowie

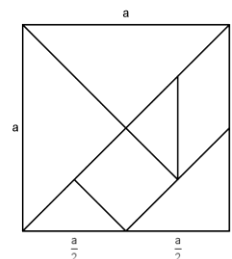
Jeśli chcesz zamieścić informacje dla innych edukatorów (np. plany lekcji, rozwiązania), rób to w osobnych dokumentach (np. na stronach internetowych, dokumentach pdf). Twoi uczniowie nie powinni być rozpraszeni tego rodzaju informacjami.

### Konstrukcja demonstracyjna

Jeśli twoja konstrukcja ma być w zamierzeniu demonstracyjna, to lepiej nie zamieszczaj żadnych poleceń czy pytań na stronie. Natomiast zamieszczony komentarz powinien być zrozumiały dla uczniów.

### Tworzenia puzzli ‘Tangramu’

W tym ćwiczeniu utworzysz zestaw puzzli tangramu przedstawionego na obrazku z prawej strony. Zestaw składa się z 7 figur, które można skonstruować





wykorzystując długość  $a$  boku dużego kwadratu. Otwórz arkusz dynamiczny [Tangram Puzzle.html](#) żeby sprawdzić na czym polega ta gra.



### Zadanie 1: Wyznacz boki każdej z części

Aby skonstruować części 'Tangramu' musisz najpierw wyznaczyć boki każdej z siedmiu figur. Wszystkie one zależą od długości boku dużego kwadratu

Wskazówka: Czasami warto przyrzeć się przekątnym, a czasem długościom wysokości mniejszych trójkątów. Ich długości łatwiej wyrazimy poprzez zmienną  $a$  niż długości odpowiednich boków.

### Zadanie 2: Skonstruuj poszczególne części 'Tangramu'

1. Wprowadź liczbę  $a = 6$ . Będzie ona podstawą do konstrukcji wszystkich trójkątów i czworokątów potrzebnych do utworzenia puzzli Tangramu.
2. Zaczynij konstrukcję każdej figury od utworzenia odcinka o danej długości.

(Narzędzie: *Odcinek z punktu o danej długości*  lub *Wielokąt o Stałym Kształcie* ). To pozwoli Ci potem przemieszczać i obracać każdą z figur.

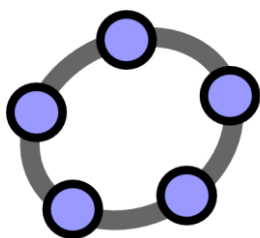
Uwaga: Aby wykonać te konstrukcje w GeoGebra, musisz wcześniej wyznaczyć sobie długość początkowego odcinka dla każdej figury

3. Podpowiedzi do konstrukcji:
  - a. Aby skonstruować trójkąt prostokątny startując od przeciwprostokątnej, możesz wykorzystać twierdzenie o kącie wpisanym opartym na średnicy.
  - b. Jeśli znasz długości przyprostokątnych równoramiennego trójkąta prostokątnego to możesz go skonstruować podobnie jak konstruuje się kwadrat.
  - c. Aby skonstruować kwadrat startując od przekątnych, warto pamiętać, że przekątne kwadratu są prostopadłe przecinają się w połowie.
  - d. Dla konstruowania równoległoboku warto znać miarę jego kąta ostrego.
4. Przetestuj swoją konstrukcję próbując ułożyć kwadrat o boku długości  $a$  z utworzonych figur.
5. Dopasuj wymiary okna i rozmieść figury w różnych miejscach jego obszaru. Wyeksportuj konstrukcję do arkusza dynamicznego, dodając wyjaśnienia dla uczniów.

### Zadanie Dnia: Zmodyfikuj Puzzle 'Tangramowe'

Z utworzonych figur można, oprócz kwadratu, ułożyć też inne figury. Poszukaj w Internecie innej figury niż kwadrat (np. [tangram\\_kot.png](#)) i wstaw ją do *Widoku Grafiki*. Ponownie wyeksportuj konstrukcję utworzoną w GeoGebra, zmieniając odpowiednio polecenia i nazwę arkusza (patrz [Tangram Puzzle Kot.html](#)).





## Własne Narzędzia i Dostosowanie Paska Narzędzi

GeoGebra | Warsztaty | Część 7

### Spis Treści

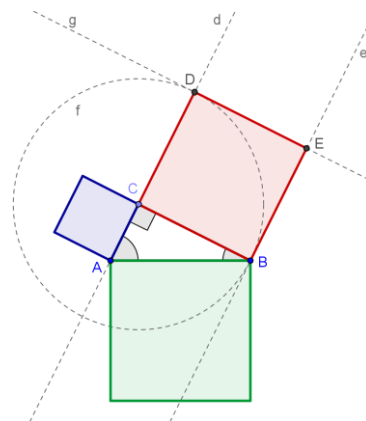
7.1. <a href="#">TWIERDZENIE PITAGORASA</a> .....	92
7.2. <a href="#">TWORZENIE WŁASNYCH NARZĘDZI</a> .....	94
7.3. <a href="#">ZAPISYWANIE I IMPORTOWANIE NARZĘDZI UŻYTKOWNIKA</a> .....	96
7.4. <a href="#">TWORZENIE NARZĘDZIA KWADRAT</a> .....	97
7.5. <a href="#">SPIRALA FIBONACCIEGO</a> .....	98
7.6. <a href="#">KONSTRUKCJA ŚRODKA OKRĘGU</a> .....	99
7.7. <a href="#">DOSTOSOWANIE PASKA NARZĘDZI</a> .....	101
7.8. <a href="#">ZADANIE DNIA: ODKRYCIE EULERA</a> .....	102



## Twierdzenie Pitagorasa

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw *Etykietowanie* na *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje*– *Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

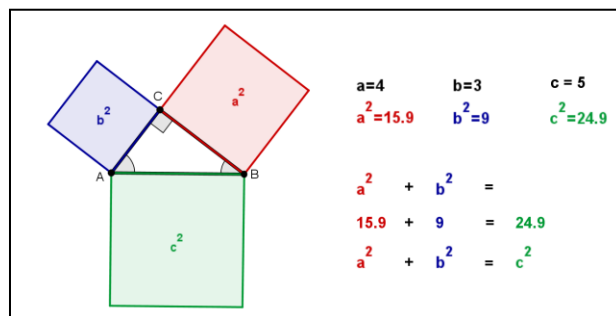
1		Utwórz odcinek $AB$
2		Narysuj Półokrąg $c$ wyznaczony przez punkty $A$ and $B$
3		Wstaw nowy punkt $C$ na utworzonym półokręgu <u>Wskazówka:</u> Sprawdź czy punkt $C$ faktycznie leży na półokręgu, przeciągając go myszką.
4		Ukryj odcinek i półokrąg.
5		Utwórz trójkąt $ABC$ wskazując wierzchołki w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
6		Zmień nazwy boków na $a$ , $b$ i $c$ .
7		Zaznacz kąty wewnętrzne trójkąta $ABC$ <u>Wskazówka:</u> Po wybraniu narzędzia, kliknij na wnętrze trójkąta.
8		Przesuń myszką punkt $C$ aby sprawdzić czy konstrukcja jest poprawna.
9		Narysuj prostą $d$ prostopadłą do odcinka $BC$ i przechodzącą przez punkt $C$ .
10		Narysuj prostą $e$ prostopadłą do odcinka $BC$ i przechodzącą przez punkt $B$ .
11		Narysuj okrąg $f$ o środku $C$ i przechodzący przez punkt $B$ .
12		Zaznacz punkt $D$ przecięcia się okręgu $f$ z prostopadłą $d$ .
13		Narysuj prostą $g$ równoległą do odcinka $BC$ przechodzącą przez punkt $D$ .
14		Zaznacz punkt $E$ przecięcia się prostych $e$ i $g$ .
15		Narysuj kwadrat $CBED$ .



16		Ukryj linie pomocnicze i okrąg.
17		Powtórz analogicznie kroki od 8 to 15 dla boku AC trójkąta.
18		Powtórz analogicznie kroki od 8 to 15 dla boku AB trójkąta.
19		Przesuń myszką wierzchołki, żeby sprawdzić poprawność konstrukcji kwadratów.
20		Dopasuj wygląd obiektów korzystając z paska narzędzi <i>Widoku Grafiki</i> .

## Wzbogacenie konstrukcji

Dodaj statyczne i dynamiczne teksty, które pomogą zrozumieć twierdzenie Pitagorasa  $a^2 + b^2 = c^2$  gdzie  $a$  i  $b$  są długościami przyprostokątnych, oraz  $c$  jest długością przeciwprostokątnej w trójkącie prostokątnym.



## Nowe narzędzie

	<b>Kopiuuj styl</b>	<b>Nowe!</b>
	<p><u>Wskazówka:</u> Kliknij na obiekt, żeby skopiować jego styl wyglądu. Następnie kliknij na inne obiekty, żeby przyjęły ten sam styl wyglądu.</p>	

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy* jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

21		Utwórz środki dla wszystkich trzech kwadratów. <u>Wskazówka:</u> Dla każdego kwadratu, kliknij na dowolne dwa przeciwległe jego wierzchołki
22	ABC	Wprowadź tekst statyczny <i>text1</i> : " $a^2$ " i przypisz go do środka odpowiedniego kwadratu.



		<u>Uwaga:</u> Nie zapomnij zahaczyć kwadraciku LaTeX , żeby uzyskać formułę $a^2$ .
23	ABC	Wprowadź tekst statyczny <i>text2</i> : " $b^2$ " i przypisz go do środka odpowiedniego kwadratu.
24	ABC	Wprowadź tekst statyczny <i>text3</i> : " $c^2$ " i przypisz go do środka odpowiedniego kwadratu.
25		Ukryj środki kwadratów.
26		Sformatuj tekst tak by kolory czcionek odpowiadały kolorom odpowiednich kwadratów.
27	ABC	Wstaw tekst opisujący twierdzenie Pitagorasa.
28		Wyeksportuj konstrukcję do arkusza dynamicznego. Wymyśl wyjaśnienie które pomoże twoim uczniom zrozumieć twierdzenie Pitagorasa.

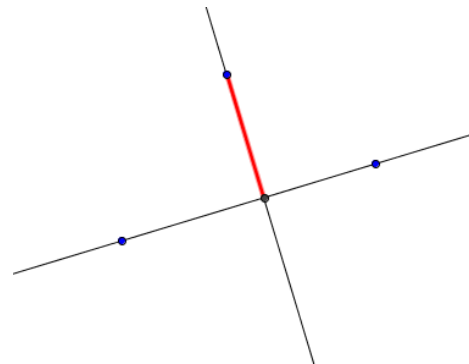
## Tworzenie własnych narzędzi

GeoGebra pozwala tworzyć własne narzędzia. Oznacza to, że możesz poszerzyć pasek narzędzi o własne narzędzia. Utwórzmy teraz narzędzie, które będzie wyznaczało najmniejszą odległość między prostą a punktem (przydatne np. do wyznaczania wysokości trójkąta). Zanim będziesz mógł utworzyć nowe narzędzie musisz skonstruować wszystkie potrzebne do tego obiekty.

### Konstrukcja potrzebna do utworzenia własnego narzędzia

#### Przygotowania



- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw *Etykietowanie* na *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje*– *Etykietowanie*).




#### Kroki konstrukcji

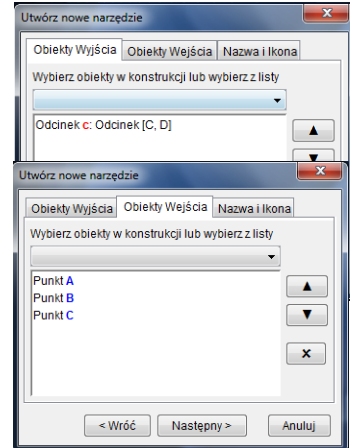
1		Narysuj prostą <i>a</i> przechodzącą przez punkty <i>A</i> and <i>B</i> .
2		Wstaw nowy punkt <i>C</i> .
3		Narysuj prostą <i>b</i> prostopadłą do prostej <i>a</i> i przechodzącą przez punkt <i>C</i> .
4		Zaznacz punkt <i>D</i> przecięcia się prostych <i>a</i> i <i>b</i> .



5		Narysuj odcinek $c$ między punktami $C$ i $D$ .
6		Przesuń punkty $A$ , $B$ i $C$ , żeby sprawdzić poprawność konstrukcji.
7		Zmień kolor odcinka $c$ i ukryj etykiety wszystkich obiektów.

## Tworzenie własnego narzędzia

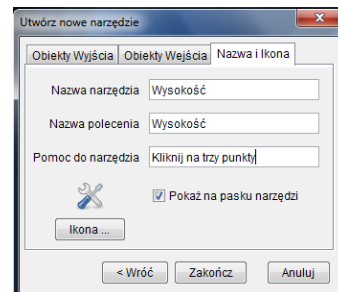
1. W menu Narzędzia Kliknij na ikonę  *Utwórz nowe narzędzie...* aby otworzyć okno dialogowe *Utwórz nowe narzędzie*.
2. Domyślnie aktywna jest zakładka *Obiekty Wyjścia*.
3. Wskaż obiekty wyjścia twojego nowego narzędzia klikając na zamierzony obiekt docelowy w Widoku Grafiki (w naszym przypadku jest to odcinek  $c$  lub zaznacz ten obiekt w menu rozwijanym (kliknij na strzałkę obok poniżej napisu *Wskaż obiekty wyjścia*, żeby rozwinąć listę z dostępnymi obiektami)



4. Kliknij przycisk *Następny >* aby uaktywnić zakładkę *Obiekty Wejścia*.
5. GeoGebra uzupełnia automatycznie odpowiednie obiekty wejścia dla twojego narzędzia (w naszym przypadku: punkty  $A$ ,  $B$  i  $C$ ).

Uwaga: GeoGebra wybiera jako obiekty wejścia wszystkie tzw. 'obiekty rodzicielskie' dla obiektów wyjścia, które wskazałeś.

6. Kliknij przycisk *Następny >*, żeby uaktywnić zakładkę *Nazwa i Ikona*.
7. Uzupełnij pola tekstowe *Nazwa narzędzia* i *Pomoc do narzędzia*. Uwaga: GeoGebra automatycznie wypełnia pole *Nazwa polecenia*.
8. Kliknij przycisk *Zakończ*



Uwaga: Twoje nowe narzędzie jest teraz częścią paska narzędzi GeoGebry.

## Wypróbuj działanie nowego narzędzia


1. Otwórz nowy plik w GeoGebry używając menu *Plik – Nowy*.  
Uwaga: Twoje narzędzie nadal jest częścią paska narzędzi.
2. Utwórz trójkąt  $ABC$  używając narzędzia *Wielokąt*.
3. Uaktywnij narzędzie *Wysokość*.
4. Kliknij na punkty  $A$ ,  $B$ , i  $C$ , żeby utworzyć jedną z wysokości.
5. Utwórz inną wysokość trójkąta.



6. Utwórz punkt  $D$  przecięcia się dwóch wysokości aby pokazać ortocentrum trójkąta. (Jeśli trójkąt jest rozwartokątny to punkt  $D$  nie jest widoczny, istnieje jednak w protokole konstrukcji, i po zmodyfikowaniu trójkąta do trójkąta ostrokątnego, punkt  $D$  będzie widoczny w Widoku grafiki)

## Zapisywanie i importowanie narzędzi użytkownika



### Zapisz własne narzędzie

1. W menu *Narzędzia* Kliknij ikonę  *Menedżer narzędzi ...* aby otworzyć okno dialogowe *Menedżer narzędzi*.
2. Zaznacz swoje narzędzie *Wysokość* z listy dostępnych narzędzi
3. Kliknij przycisk *Zapisz jako...* aby zapisać własne narzędzie i uczynić je dostępnym do późniejszych konstrukcji.
4. Wybierz nazwę dla swojego narzędzia (np. *Wysokosc.ggt*) i zachowaj je na swoim komputerze.

Uwaga: Narzędzia Użytkownika są w GeoGebry zapisywane jako pliki z rozszerzeniem *.ggt*. Pomaga to odróżnić 'zwykłe' pliki GeoGebry (z rozszerzeniem *.ggb*) od narzędzi użytkownika (z rozszerzeniem *.ggt*).

### Importowanie narzędzi użytkownika

Po zapisaniu swojego narzędzia możesz go na nowo używać w późniejszych konstrukcjach. Domyślnie pasek narzędzi GeoGebry nie zawiera narzędzi użytkownika. W celu ponownego użycia jednego z narzędzi użytkownika, trzeba to narzędzie zaimportować do nowego pliku GeoGebry.

1. Otwórz nowe okno GeoGebry (menu *Plik* –  *Nowe okno*).
2. W menu *Plik* kliknij  *Otwórz*.
3. Znajdź i zaznacz plik z narzędziem użytkownika zachowany wcześniej (*Wysokosc.ggt*).
4. Kliknij przycisk *Otwórz*, żeby zaimportować narzędzie do paska narzędzi okna GeoGebry.


Uwaga: Import narzędzia użytkownika nie wpływa na konstrukcję w oknie GeoGebry. Możesz importować narzędzie w trakcie tworzenia konstrukcji.

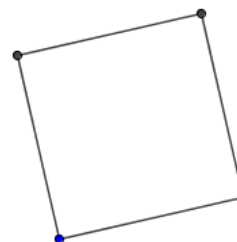















## Tworzenie narzędzia Kwadrat

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na –  Geometria.
- Ustaw Etykietowania na *Wszystkie nowe obiekty* (menu *Opcje – Etykietowania*).



### Kroki konstrukcji

1		Utwórz odcinek $a$ o końcach $AB$
2		Narysuj prostą $b$ prostopadłą do odcinka $AB$ i przechodzącą przez punkt $B$
3		Narysuj okrąg $c$ o środku $B$ i przechodzący przez punkt $A$
4		Zaznacz punkt $C$ przecięcia się okręgu $c$ z prostą $b$ .
5		Narysuj prostą $d$ równoległą do prostej $b$ i przechodzącą przez punkt $A$ .
6		Narysuj prostą $e$ równoległą do odcinka $a$ i przechodzącą przez punkt $C$ .
7		Zaznacz punkt $D$ przecięcia się prostych $d$ i $e$ .
8		Narysuj kwadrat $ABCD$ .
9		Ukryj obiekty pomocnicze użyte w konstrukcji (proste i okręgi).
10		Ukryj etykiety wszystkich obiektów.
11		Ustaw kolor kwadratu na czarny i wypełnienie na 0%.
12		Utwórz narzędzie Kwadrat (menu <i>Narzędzia – Utwórz nowe narzędzie...</i> ). <u>Obiekty Wyjścia</u> : kwadrat, boki kwadratu, punkty $C$ i $D$ <u>Obiekty Wejścia</u> : punkty $A$ i $B$ <u>Nazwa</u> : Kwadrat <u>Pomoc do Narzędzia</u> : Kliknij na dwa punkty.
13		Zapisz nowe narzędzie jako <i>Kwadrat.ggt</i> . <u>Wskazówka</u> : Menu <i>Narzędzie – Menedżer narzędzi ... – Zapisz jako...</i>



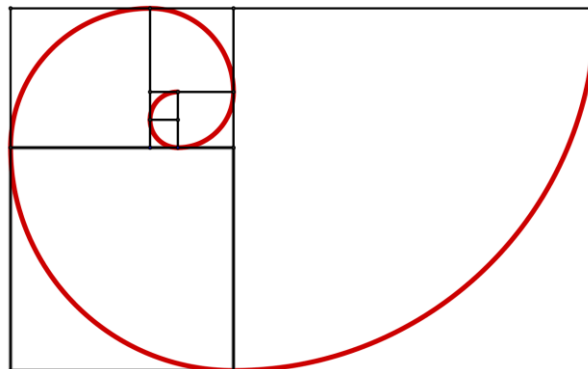
## Zadanie

Porównaj proces konstrukcji kwadratu z konstrukcją, której używałeś w trakcie zajęć Warsztaty 2. Jakie są różnice?


## Spirala Fibonacciego

Spiralę Fibonacciego można utworzyć rysując łuki łączące przeciwległe wierzchołki kwadratów w parkietażu Fibonacciego ułożonego z kwadratów o bokach 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...

*Spirala Fibonacciego stanowi przybliżenie tzw. Złotej Krzywej, będącej przypadkiem spirali logarytmicznej, w której szerokość co  $90^\circ$  zwiększa się dokładnie  $\varphi$  razy, gdzie  $\varphi$  jest złotą liczbą.*



## Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na –  Geometria.
- Ustaw Etykietowania na *Bez nowych obiektów* (menu *Opcje – Etykietowania*).


## Nowe narzędzie

**Łuk zatoczony ze środka i przechodzący przez dwa punkty**

**Nowe!**



Wskazówka: Kliknij na środek okręgu wzdłuż którego ma leżeć łuk. Następnie kliknij na dwa punkty, które definiują promień i długość łuku.

Wskazówka: Pamiętaj, że możesz korzystać z *Pomocy*  jeśli nie wiesz jak stosować nowe narzędzie. Wypróbuj działanie nowych narzędzi przed przystąpieniem do właściwej konstrukcji.

## Kroki konstrukcji

1



Wykorzystaj narzędzie Kwadrat do utworzenia kwadratu o boku 1

Wskazówka: Umieść obok siebie dwa punkty na siatce.



2		Utwórz drugi kwadrat o boku 1 poniżej kwadratu utworzonego przed chwilą. <u>Wskazówka:</u> Użyj punktów, które już zostały utworzone, tak aby dwa kwadraty były połączone jednym bokiem.
3		Utwórz trzeci kwadrat o boku długości 2 z prawej strony dwóch poprzednich kwadratów.
4		Kontynuuj tworzenie następnych kwadratów o bokach długości 3, 5, 8, i 13 w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
5		Utwórz łuk wewnątrz pierwszego kwadratu <u>Wskazówka:</u> Wskaż prawy dolny wierzchołek kwadratu jako środek okręgu na którym ma leżeć łuk . Wskaż inne dwa przeciwległe wierzchołki kwadratu w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.
6		Powtórz krok 5 dla każdego z kwadratów w celu utworzenia spirali Fibonacciego..
7		Dopracuj szatę graficzną w oknie dialogowym <i>Właściwości</i> .

## Konstrukcja środka okręgu

### Powrót do szkoły...

Czy wiesz jak skonstruować środek okręgu? Na kartkach, które dostarczył Ci prowadzący warsztaty, masz narysowane okręgi (4 na uczestnika) . Spróbuj znaleźć sposób na znalezienie środków tych okręgów (a) stosując składanie kartki i (b) za pomocą ołówka i linijki.

#### Wskazówki:

- Wersja 1a: Złóż kartkę wzdłuż dwóch średnic. Ich punkt przecięcia jest środkiem okręgu.
- Wersja 1b: Czy potrafisz odtworzyć tę konstrukcję używając ołówka i linijki?
- Wersja 2a: Zagnij kartkę wzdłuż dwóch cięciw i następnie wzdłuż symetralnych tych cięciw. Te ostatnie przetną się w środku okręgu.
- Wersja 2b: Czy potrafisz odtworzyć tę konstrukcję używając ołówka i linijki?

Teraz wykonaj tę konstrukcję w GeoGebraze odtwarzając wersję (2b).

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebraze.
- Przełącz *Widoki* na – *Geometria*.



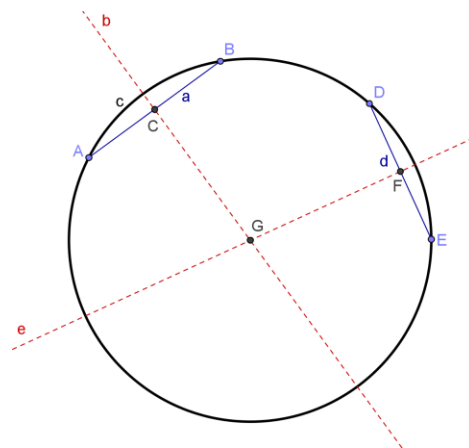
- Wyświetl *Pole Wprowadzania*

## Kroki konstrukcji

1		Wprowadź równanie okręgu $c: x^2 + y^2 = 16$
2		Narysuj cięciwę $a$ okręgu $c$ <u>Wskazówka:</u> Cięciwa okręgu jest to odcinek, którego końce leżą na tym okręgu.
3		Utwórz środek $C$ cięciwy $a$ .
4		Narysuj prostą $b$ prostopadłą cięciwy $a$ i przechodzącą przez środek $C$ . <u>Wskazówka:</u> Właśnie utworzyłeś symetralną $a$ .
5		Narysuj jeszcze jedną cięciwę $d$ okręgu $c$
6		Utwórz środek $F$ cięciwy $d$ .
7		Narysuj prostą $e$ prostopadłą cięciwy $d$ i przechodzącą przez środek $F$ .
8		Zaznacz punkt $G$ przecięcia się prostych $b$ i $e$ .
9		Dopracuj konstrukcję od strony graficznej.
10		Sprawdź poprawność konstrukcji zmieniając położenie cięciw.

## Zadania

- Kliknij prawym przyciskiem myszki (MacOS: *Ctrl*-klik) w *Widoku Grafiki* z menu kontekstowego wybierz *Pasek nawigacji* (menu *Widok*) żeby prześledzić kolejne etapy konstrukcji.
- Otwórz *Protokół konstrukcji* (menu *Widok*) i wyświetl kolumnę *Punkty Przerwania* aby pogrupować obiekty tworzone w trakcie konstrukcji. Po ustaleniu punktów przerwania zaznacz *Pokaż tylko punkty przerwania*.
  - Wyeksportuj konstrukcję do arkusza dynamicznego wraz z Paskiem nawigacji etapów konstrukcji (*okno dialogowe Eksportuj* – zakładka *Zaawansowany*) i zapisz plik jako [Srodek Okregu Rozwiazanie.html](#).



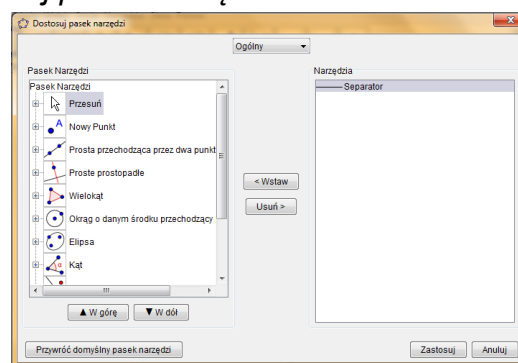


- Otwórz arkusz dynamiczny, który właśnie wyeksportowałeś. Użyj Paska nawigacji konstrukcji aby odtworzyć konstrukcję środka okręgu.

## Dostosowanie paska narzędzi

Poznamy teraz jak można ograniczać liczbę narzędzi dostępnych dla twoich uczniów.

1. Kliknij w menu narzędzia polecenie *Dostosuj pasek narzędzi ...*
2. W górnej części okna możesz z listy rozwijalnej wybrać różne domyślne Paski narzędzi (Ogólny, Widok Arkusza, CAS, Analiza danych)
3. Okno z lewej strony zawiera listę narzędzi, które należą do wybranego paska domyślnego. Jeśli klikniesz na ikonę z symbolem + przed nazwą rozwinię się zestaw odpowiednich narzędzi.
4. Kliknij na symbol + przy narzędziu *Przesuń*. Wybierz narzędzie *Obróć wokół punktu* i kliknij na przycisk *Usuń*. Następnie wybierz narzędzie *Zapisz do Arkusza Kalkulacyjnego* i kliknij na przycisk *Usuń*. Teraz jedynym narzędziem w zestawie *Przesuń* będzie narzędzie *Przesuń*.
5. Otwórz teraz następny zestaw i usuń wszystkie narzędzia oprócz tych, które są potrzebne do konstrukcji środka okręgu (*Środek*, *Odcinek między dwoma punktami*, *Proste prostopadłe*).
6. Użyj przycisków *W górę* i *W dół*, żeby zmienić kolejność narzędzi na liście w lewym oknie.
7. Na koniec Kliknij przycisk *Zastosuj*.
8. Teraz w oknie GeoGebry powinien widnieć dostosowany Pasek Narzędzi.



## Zadanie

- Usuń z konstrukcji wszystkie obiekty oprócz okręgu.
- Wyeksportuj konstrukcję do arkusza dynamicznego z dostosowanym paskiem narzędzi (Okno dialogowe *Eksportuj* – zakładka *Zaawansowane*).
- Zapisz arkusz dynamiczny pod nazwą *srodek\_okregu\_zadanie.html*.



## Zadanie dnia: odkrycie Eulera

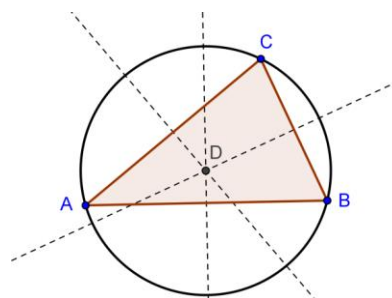
### Zadanie

- Skonstruuj następujące trzy punkty trójkąta: środek okręgu opisanego na trójkącie, ortocentrum i środek ciężkości. Utwórz narzędzia tworzące każde z tych punktów. Zachowaj je w pasku narzędzi.
- Wykorzystaj utworzone narzędzia i odkryj zależność jaka łączy te trzy punkty, tak jak uczynił to szwajcarski matematyk Leonard Euler w XVIII wieku (oczywiście bez pomocy dynamicznego programu geometrycznego ;-)

### Okrąg opisany na trójkącie

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw *Etykietowanie* na *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje*– *Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

1		Narysuj dowolny trójkąt $ABC$
2		Narysuj symetralne przynajmniej dwóch boków trójkąta $ABC$ . <u>Wskazówka:</u> Narzędzie <i>Symetralna</i> może być stosowane do istniejącego odcinka.
3		Zaznacz punkt $D$ przecięcia się dwóch symetralnych. <u>Uwaga:</u> Narzędzie <i>Przecięcie dwóch obiektów</i> nie daje się zastosować do przecięcia trzech prostych: należy albo wskazywać po dwie z trzech prostych kolejno, albo kliknąć w miejscu przecięcia i wybrać za każdym razem prostą z listy obiektów w tej pozycji.
4		Narysuj okrąg wskazując $D$ jako środek i jeden z wierzchołków trójkąta $ABC$ jako punkt, przez który okrąg ma przechodzić
5		Zmień nazwę $D$ na <i>Środek okręgu opisanego</i> .
6		Sprawdź poprawność konstrukcji przeciągając myszką różne swobodne obiekty konstrukcji.
7		Utwórz narzędzie <i>Środek okręgu opisanego</i> .
<u>Obiekty Wyjścia:</u> punkt <i>Środek okręgu opisanego</i> <u>Obiekty wejścia:</u> punkty $A$ , $B$ i $C$ <u>Nazwa:</u> <i>Środek okręgu opisanego</i> <u>Pomoc do Narzędzia:</u> Kliknij na trzy punkty		

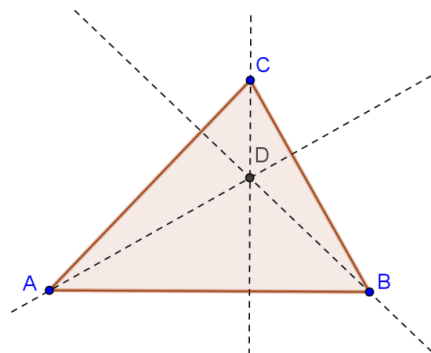


8 Zapisz narzędzie w pliku *Srodek\_Okregu\_Opisanego.ggt*.

## Ortocentrum trójkąta

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebraze.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw Etykietowanie na Tylko nowe punkty (menu Opcje– Etykietowanie).



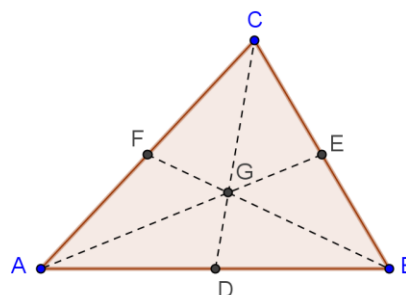
### Kroki konstrukcji

1		Narysuj dowolny trójkąt $ABC$
2		Narysuj proste prostopadłe do przynajmniej dwóch boków trójkąta $ABC$ i przechodzące przez wierzchołki naprzeciwko tych boków.
3		Zaznacz punkt $D$ przecięcia się dwóch z tych prostych.
4		Zmień nazwę punktu $D$ na <i>Ortocentrum</i> .
5		Sprawdź poprawność konstrukcji przesuając obiekty swobodnie.
6		Utwórz narzędzie tworzące Ortocentrum trójkąta. <u>Obiekty Wyjścia</u> : punkt <i>Ortocentrum</i> <u>Obiekty Wejścia</u> : punkty $A, B, C$ <u>Nazwa</u> : <i>Ortocentrum</i> <u>Pomoc do narzędzia</u> : Kliknij na trzy punkty
7		Zapisz narzędzie w pliku <i>Ortocentrum.ggt</i> .

## Środek ciężkości trójkąta

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebraze.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw Etykietowanie na Tylko nowe punkty (menu Opcje– Etykietowanie).





## Kroki konstrukcji

1		Utwórz dowolny trójkąt $ABC$
2		Zaznacz środki $D$ , $E$ , $F$ boków trójkąta
3		Narysuj środkowe trójkąta, tzn. odcinki łączące środki boków trójkąta z wierzchołkami naprzeciwko tych boków.
4		Zaznacz punkt $G$ przecięcia się dwóch z tych środkowych.
5		Zmień nazwę punktu $G$ na <i>Środek ciężkości</i> .
6		Sprawdź poprawność konstrukcji zmieniając położenie obiektów swobodnych.
7		Utwórz narzędzie do tworzenia środka ciężkości trójkąta. <u>Obiekty Wyjścia</u> : punkt <i>Środek Ciężkości</i> <u>Obiekty Wejścia</u> : punkty $A$ , $B$ , $C$ <u>Nazwa</u> : <i>Środek Ciężkości Trójkąta</i> <u>Pomoc do Narzędzia</u> : Kliknij na trzy punkty
8		Zapisz narzędzie w pliku <i>Srodek_Ciezkosci_Trojkata.ggt</i> .

## Jakie było odkrycie Eulera?

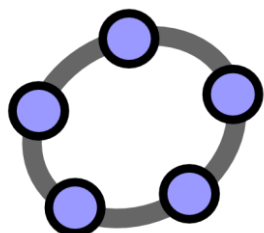
### Zadanie 1

- Otwórz nowy plik w GeoGebra i zaimportuj trzy nowe narzędzia: (*Srodek\_Okregu\_Opisanego.ggt*, *Ortocentrum.ggt* i *Srodek\_Ciezkosci\_Trojkata.ggt*).
- Utwórz dowolny trójkąt  $ABC$  i zastosuj trzy nowe narzędzia aby utworzyć środek okręgu opisanego, ortocentrum i środek ciężkości tego samego trójkąta.
- Poruszaj wierzchołkami trójkąta  $ABC$  i obserwuj położenie tych trzech 'znamiennych' punktów. W jakiej relacji są te trzy punkty? Wykorzystaj jedno z narzędzi GeoGebry, żeby zilustrować tę zależność.

### Zadanie 2

- Otwórz pusty plik w GeoGebra. Dostosuj pasek narzędzi tak, by zawierał tylko następujące narzędzia: *Przesuń*, *Wielokąt*, *Prosta przechodząca przez dwa punkty*, *Okrąg o danym środku przechodzący przez punkt*, *Środek okręgu opisanego*, *Ortocentrum* i *Środek ciężkości trójkąta*.
- Wyeksportuj pusty plik GeoGebry do arkusza dynamicznego udostępniając pasek narzędzi. Wymyśl instrukcje, które naprowadzą twoich uczniów na odkrycie prostej Eulera w trójkącie.





# Widoczność Warunkowa i Ciągi

GeoGebra | Warsztaty | Część 8

## Spis treści

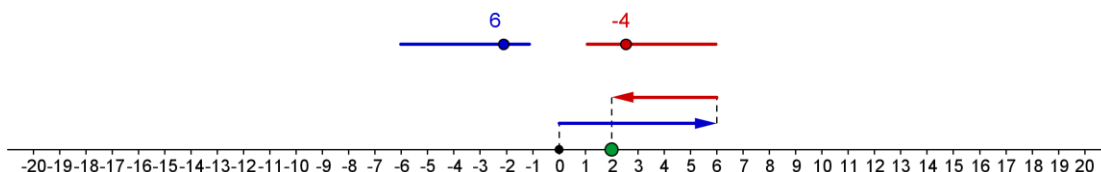
8.1. <a href="#">WIZUALIZACJA DODAWANIA LICZB CAŁKOWITYCH NA OSI</a> .....	106
8.2. <a href="#">FORMATOWANIE WARUNKOWE – POLE WYBORU</a> .....	110
8.3. <a href="#">TRÓJKĄT SIERPIŃSKIEGO</a> .....	111
8.4. <a href="#">WIADOMOŚCI WSTĘPNE O POLECENIU <i>Ciąg</i></a> .....	113
8.5. <a href="#">WIZUALIZACJA MNOŻENIA LICZB NATURALNYCH</a> .....	114
8.6. <a href="#">ZADANIE DNIA: KOMPOZYCJA STRUNOWA Z KRZYWYCH BÉZIERA</a> .....	116



## Wizualizacja dodawania liczb całkowitych na osi

### Przygotowania







- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ustaw *Etykietowanie* na *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje* – *Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

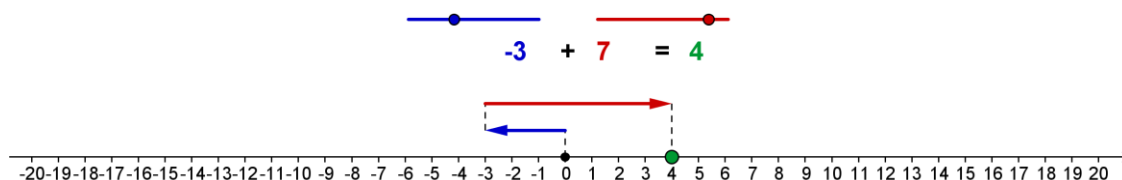
1	Otwórz okno dialogowe <i>Widoku Grafiki</i>  <u>Wskazówka:</u> Kliknij na ikonę <i>Ustawienia</i> , a następnie <i>Widok Grafiki</i> .
2	W zakładce <i>OśX</i> zahacz okienko odległość i wpisz 1 w polu tekstowym obok.
3	Ustaw <i>minimum</i> Osi <i>X</i> na -21 i <i>maksimum</i> na 21.
4	W zakładce <i>OśY</i> odhacz <i>Pokaż</i> .
5	Zamknij okno dialogowe <i>Widoku Grafiki</i> .
6	$a = 2$ Wprowadź suwak liczbowy $a$ w przedziale od -10 do 10, z krokiem 1.
7	$a = 2$ Wprowadź suwak liczbowy $b$ w przedziale od -10 do 10, z krokiem 1.
8	Pokaż wartości suwaków (zamiast nazw) <u>Podpowiedź:</u> Możesz skorzystać z paska narzędzi <i>Widoku grafiki</i> . 
9	$A$ Utwórz punkt: $A = (0, 1)$
10	Utwórz punkt: $B = A + (a, 0)$ <u>Podpowiedź:</u> Odległość punktu $B$ od punktu $A$ jest zdefiniowana za pomocą suwaka $a$ .



11		Wprowadź wektor: $u = \text{Wektor}[A, B]$ (który ma długość $ a $ ).
12		W Polu Wprowadzania wprowadź punkt $C$ : $C = B + (0, 1)$
13		W Polu Wprowadzania wprowadź punkt $D$ : $D = C + (b, 0)$
14		Wprowadź wektor: $v = \text{Wektor}[C, D]$ (który ma długość $ b $ ).
15		W Polu Wprowadzania wprowadź punkt $R$ : $R = (x(D), 0)$ . <u>Podpowiedź:</u> $x(D)$ oznacza współrzędną $x$ punktu $D$ . W ten sposób, punkt $R$ pokazuje wynik dodawania na osi liczbowej.
16		Wprowadź punkt $Z$ : $Z = (0, 0)$
17		Wprowadź odcinek: $g = \text{Odcinek}[Z, A]$
18		Wprowadź odcinek: $h = \text{Odcinek}[B, C]$
19		Wprowadź odcinek: $i = \text{Odcinek}[D, R]$
20		Użyj okien dialogowych, żeby udoskonalić szatę graficzną konstrukcji (np. dopasuj kolory suwaków i wektorów, style linii, położenie suwaków, ukryj etykiety).

## Dynamiczny tekst

Możesz zaopatrzyć swoją konstrukcję w dynamiczny tekst, który będzie wyświetlał dodawanie przedstawione w konstrukcji. Aby różne części tekstu pojawiały się w różnych kolorach musisz wprowadzać tekst dynamiczny krok po kroku.





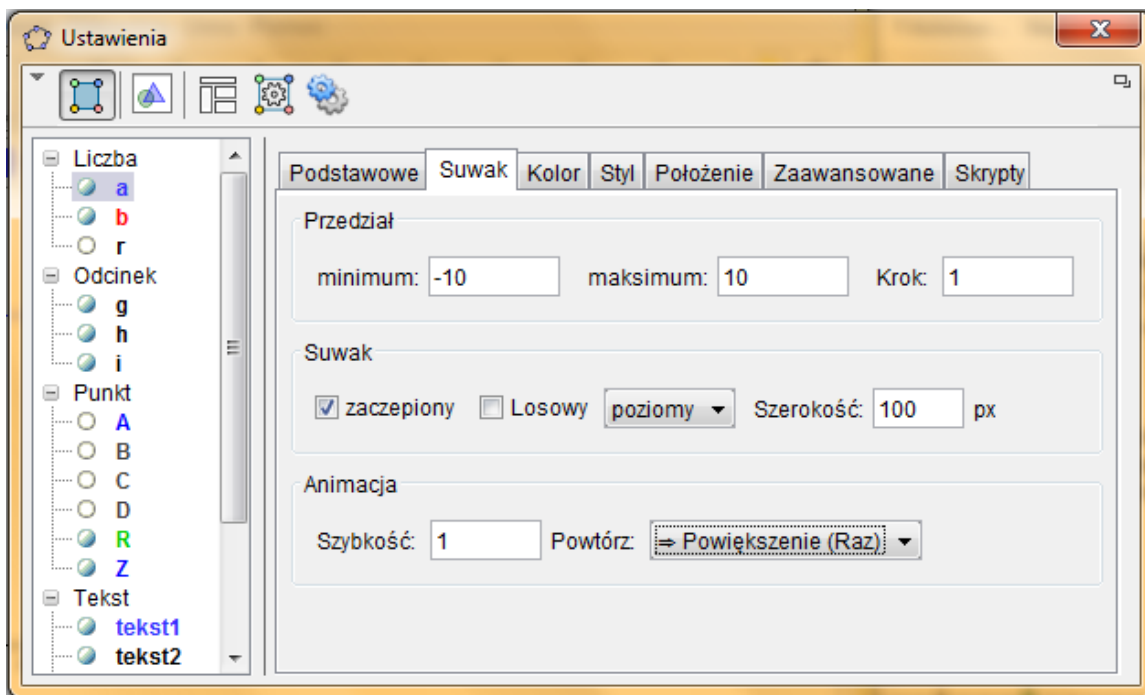
1		Oblicz wynik dodawania wpisując w Polu Wprowadzania: $r = a + b$
2	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny <i>tekst1</i> : a
3	ABC	Wprowadź tekst statyczny <i>tekst2</i> : "+"
4	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny <i>tekst3</i> : b
5	ABC	Wprowadź tekst statyczny <i>tekst4</i> : "="
6	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny <i>tekst5</i> : r
7		Dopasuj kolory w <i>tekst1</i> , <i>tekst3</i> , i <i>tekst5</i> do kolorów odpowiadających im suwaków, wektorów i punktu R.
8		Wyrównaj tekst w <i>Widoku Grafiki</i> .
9		Ukryj etykiety suwaków i osadź tekst
10		Wyeksportuj interaktywną konstrukcję do dynamicznej karty pracy w postaci strony internetowej html.

## Animacja konstrukcji

GeoGebra umożliwia animację wartości suwaków (liczb, kątów) i punktów na ścieżkach (odcinku, prostej, wykresie funkcji, krzywej, itd.) . Podczas animacji jest uruchomiona GeoGebra w pełni funkcjonuje. Pozwala to na wprowadzanie zmian w konstrukcji podczas gdy obraz jest ruchomy.

## Kroki konstrukcji.

1	Otwórz plik z konstrukcją utworzoną w poprzednim ćwiczeniu.
2	Kliknij prawym przyciskiem myszki (MacOS: <i>Ctrl-klik</i> ) suwak a i zaznacz w menu kontekstowym <i>Animacja włączona</i> . <u>Wskazówka</u> : W lewym dolnym rogu <i>Widoku Grafiki</i> powinien pokazać się przycisk animacja. To pozwala  zatrzymać animację lub ją ponownie  uruchomić.
3	Kliknij prawym przyciskiem myszki (MacOS: <i>Ctrl-klik</i> ) suwak b i zaznacz w menu kontekstowym <i>Animacja włączona</i> . <u>Wskazówka</u> : Aby zatrzymać animację tego suwaka, możesz odhaczyć w menu kontekstowym <i>Animacja włączona</i> .
4	Otwórz okno dialogowe Właściwości dla suwaków a i b i wybierz zakładkę Suwak, Można tam zmienić sposób animacji. Wypróbuj różne ustawienia i ustal jak to wpływa na wynik r.



**Szybkość:** Szybkość 1 oznacza, że w ciągu 10 sekund suwak przesuwa się o cały swój zakres jeden raz.

#### **Powtór:**

↔ Oscylacja

Wartości na przemian wzrastają i maleją.

⇒ Powiększanie

Wartości wciąż wzrastają. Po osiągnięciu maksymalnej wartości na suwaku następuje skok do wartości minimalnej i ponownie wartości wzrastają.

⇐ Pomniejszanie

Wartości wciąż maleją. Po osiągnięciu minimalnej wartości na suwaku następuje skok do wartości maksymalnej i ponownie wartości maleją.

⇒ Powiększanie (Raz)

Wartości wzrastają. Po osiągnięciu maksymalnej wartości na suwaku następuje zatrzymanie animacji.



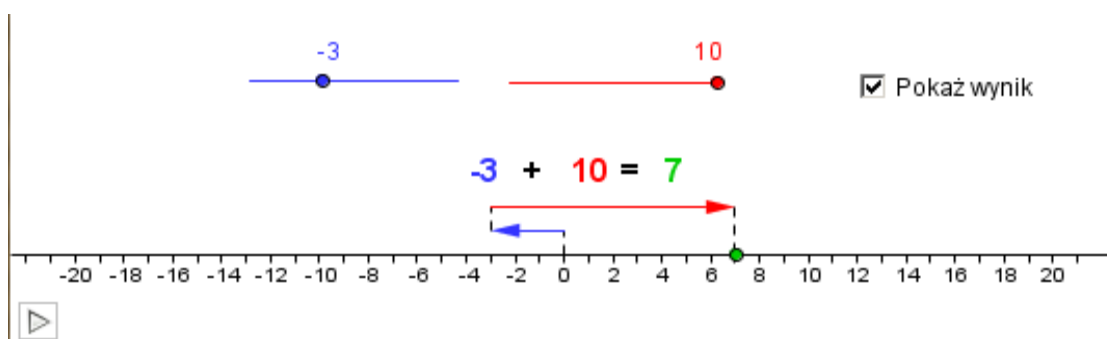
## Formatowanie warunkowe – Pole wyboru

### Nowe narzędzie

	<b>Pole wyboru do pokazywania i ukrywania obiektów. <span style="float: right;">Nowość!</span></b> <b>Podpowiedź:</b> Kliknij myszką w dowolnym miejscu <i>Widoku Grafiki</i> , żeby otworzyć okno dialogowe. Wprowadź podpis i z listy rozwijalnej wybierz obiekty, które chcesz pokazywać/ukrywać przy życiu Pola Wyboru.
--	--

### Instrukcje

Wprowadź Pole Wyboru, żeby pokazywać/ukrywać wynik dodawania.



1		Uaktywnij Pole Wyboru Pokaż /Ukryj obiekt
2		Kliknij myszką w Widoku Grafiki (obok tekstu z wynikiem dodawania). Aby wyświetlić okno dialogowe.
3		Wpisz w polu tekstowym Podpis: Pokaż wynik.
4		Z listy rozwijalnej wybierz <i>tekst5</i> . W ten sposób widoczność tego obiektu będzie kontrolowana przez Pole Wyboru. <b>Podpowiedź:</b> Zamiast zaznaczania obiektów na liście wyboru można wskazać obiekty w <i>Widoku Grafiki</i> .
5		Kliknij myszką przycisk <i>Zastosuj</i> .
6		W trybie <i>Przesuń</i> odhacz i zahacz i pole wyboru aby sprawdzić czy <i>test5</i> zostaje ukryty/pokazany.
7		Osadź Pole wyboru tak, żeby nie można go było przypadkowo przesunąć. ( <i>Okno dialogowe</i> ).

### Zmienne Boolowskie

*Pole Wyboru Pokaż/Ukryj* obiekty jest graficzną reprezentacją zmiennej boolowskiej w GeoGebra. Zmienna ta przyjmuje wartość *prawda* lub *fałsz* w zależności od tego czy *Pole Wyboru* jest zahaczone czy odhaczone w *Widoku Grafiki*.




1. Otwórz okno dialogowe *Właściwości* (wybierz: *Menu – Edycja - Właściwości*) i kliknij ikonę + przy napisie *Wielkość Boolowska*. Z lista rozwijalna zawiera tylko jeden obiekt o nazwie *j*, reprezentujący graficznie twoje pole wyboru.
2. W tym samym oknie dialogowym *Właściwości* wybierz *tekst5* z listy rozwijalnej *Tekst*
3. Kliknij na zakładkę *Zaawansowane* i zauważ, że w polu tekstowym *Warunek wyświetlania obiektu* widnieje *Pole Wyboru o nazwie j*.  
Podpowiedź: Oznacza to, że widoczność obiektu *tekst5* zależy wartości *Pola wyboru*.
4. Wybierz punkt *R* z listy obiektów oknie dialogowym *Właściwości*. Kliknij na zakładkę *Zaawansowane*. Pole tekstowe *Warunek wyświetlania obiektu* jest puste.
5. Wpisz *j* w polu *Warunek wyświetlania obiektu*. Widoczność punkt *R* jest teraz tak samo związana z *Polem Wyboru* jak i widoczność obiektu *tekst5*.
6. Powtórz kroki 4 i 5 dla odcinka *i*, który łączy drugi wektor z punktem *R* na osi liczbowej.

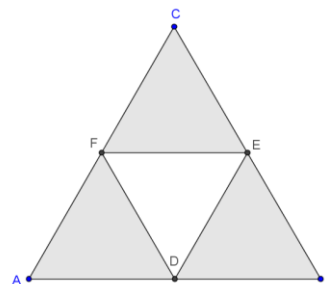
Podpowiedź: Teraz *Pole Wyboru* kontroluje trzy obiekty w twojej konstrukcji dynamicznej: *tekst5* (który pokazuje wynik dodawania), punkt *R*, i odcinek (pokazujący wynik na osi liczbowej).

## Trójkąt Sierpińskiego




Utworzymy teraz własne narzędzie, które jest kluczem do konstrukcji trójkąta Sierpińskiego.

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki* na –  *Geometria*.
- Ustaw *Etykietowanie* na *Tylko nowe punkty* (menu *Opcje – Etykietowanie*).



### Kroki konstrukcji

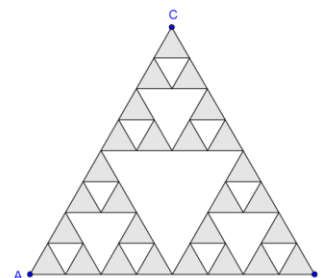
1		Utwórz dowolny trójkąt <i>ABC</i>
2		Zmień kolor trójkąta na czarny (Przełącz pasek narzędzi <i>Widoku Grafiki</i> ).
3		Utwórz środek <i>D</i> boku <i>AB</i> .
4		Utwórz środek <i>E</i> boku <i>BC</i> .



5		Utwórz środek $F$ boku $AC$ .
6		Utwórz trójkąt $DEF$ .
7		Zmień kolor trójkąta $DEF$ na biały i zwiększ <i>Wypełnianie</i> do 100% ( <i>okno dialogowe Własności, zakładka Styl</i> ).
8		Zmień kolor boków trójkąta $DEF$ na czarny ( <i>Okno dialogowe Własności</i> ).
9		Utwórz nowe narzędzie <i>Trójkąt Sierpińskiego</i> . <u>Obiekty wyjścia</u> : punkty $D$ , $E$ , i $F$ , trójkąt $DEF$ , boki trójkąta $DEF$ <u>Obiekty wejścia</u> : punkty $A$ , $B$ , i $C$ <u>Nazwa</u> : <i>Trójkąt Sierpińskiego</i> . <u>Pomoc do narzędzia</u> : Kliknij na trzy punkty.
10		Zastosuj narzędzie podręczne do trzech czarnych $ADF$ , $DBE$ , i $FEC$ aby utworzyć drugą warstwę Trójkąta Sierpińskiego.
11		Zastosuj narzędzie podręczne aby utworzyć trzecią warstwę Trójkąta Sierpińskiego.

## Widoczność warunkowa


Wprowadzimy Pola Wyboru, które pozwolą pokazywać i ukrywać różne warstwy trójkąta Sierpińskiego.



1		Ukryj wszystkie obiekty z wyjątkiem punktów $A$ , $B$ , i $C$ .
1*		Utwórz <i>Pole Wyboru</i> żeby pokazywać i ukrywać obiekty zerowej warstwy Trójkąta Sierpińskiego. <u>Napis</u> : Warstwa 0 <u>Wybrane obiekty</u> : Trójkąt $ABC$ .
2		Utwórz <i>Pole Wyboru</i> żeby pokazywać i ukrywać obiekty pierwszej warstwy Trójkąta Sierpińskiego. <u>Napis</u> : Warstwa 1 <u>Wybrane obiekty</u> : Tylko biały trójkąt i jego boki.
3		W trybie <i>Przesuń</i> sprawdź działania nowego Pola Wyboru odhaczając i zahaczając pole.
4		Utwórz <i>Pole Wyboru</i> , które pokazuje/ukrywa drugą warstwę trójkąta Sierpińskiego. <u>Napis</u> : Warstwa 2 <u>Wybrane obiekty</u> : trzy białe trójkąty średniej wielkości i ich boki.
5		W trybie <i>Przesuń</i> sprawdź działania nowego Pola Wyboru odhaczając i zahaczając pole.
6		Utwórz <i>Pole Wyboru</i> , które pokazuje/ukrywa trzecią warstwę trójkąta Sierpińskiego.





<u>Napis:</u> Warstwa 3 <u>Wybrane obiekty:</u> 9 małych białych trójkątów średniej wielkości i ich boki.	
7	 W trybie <i>Przesuń</i> sprawdź działanie nowego <i>Pola Wyboru</i> odhaczając i zahaczając pole.



## Wiadomości wstępne o poleceniu *Ciąg*

GeoGebra zawiera polecenie *Ciąg* do tworzenia listy obiektów. Deklarujemy przy tym typ obiektu, długość ciągu (tzn. liczbę tworzonych obiektów), i długość kroku (tzn. odległość między obiektami) zgodnie z poniższą syntaktyką:

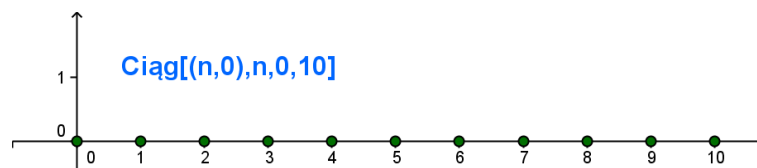
`Ciąg[<wyrażenie>, <zmienna>, <od>, <do>, <krok>]`

### Objaśnienia:

- `<wyrażenie>`:  
definiuje typ tworzonych obiektów. Dane wyrażenie musi zawierać zmienną (np.  $(i, 0)$  ze zmienną  $i$ ).
- `<zmienna>`:  
wskazuje nazwę zmiennej (np.  $i$ )
- `<od>`, `<do>`:  
definiuje przedział do którego należą wartości zmiennej (np. od 1 do 10)
- `<krok>`:  
opcjonalnie definiuje odległość między kolejnymi wartościami zmiennej. (np. 0.5).

### Przykłady zastosowań polecenia *Ciąg*

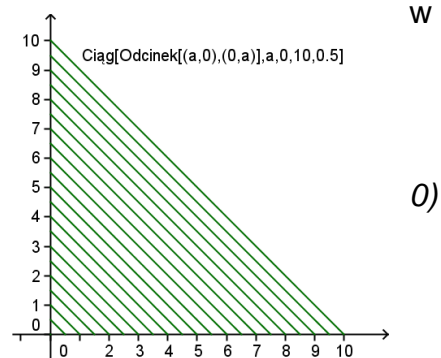
- `Ciąg[(n, 0), n, 0, 10]`
  - tworzy listę 11 punktów wzdłuż osi  $x$
  - punkty te mają współrzędne  $(0, 0), (1, 0), (2, 0), \dots, (10, 0)$





- `Ciąg[Odcinek[(a, 0), (0, a)], a, 1, 10, 0.5]`

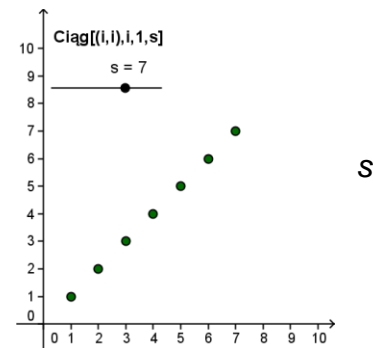
- Tworzy listę odcinków, których końce leżą na osiach w odstępach co 0.5.
- Każdy odcinek łączy punkt na osi x z punktem na osi y (odcinek o końcach (0.5, 0), (0, 0.5), odcinek o końcach (1, 0) i (0, 1); odcinek o końcach (1.5, 0) i (0, 1.5), itd.)



- Jeśli  $s$  jest suwakiem o wartościach liczbowych z przedziału od 1 do 10 i kroku 1, to polecenie

`Ciąg[(i, i), i, 0, s]`

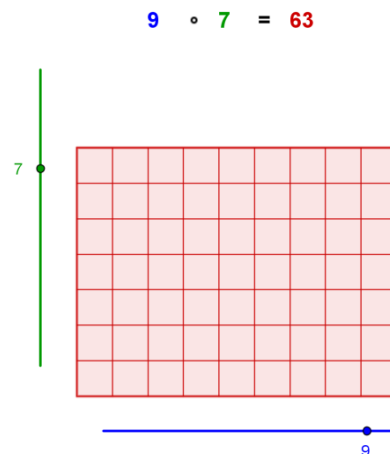
- tworzy listę składającą się z  $(s + 1)$  punktów i długość tej listy można zmieniać dynamicznie zmieniając wartość na suwaku (przeciągając myszką punkt suwaka),
- punkty mają współrzędne  $(0, 0), (1, 1), \dots, (10, 10)$ .



## Wizualizacja mnożenia liczb naturalnych

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz *Widoki* na – *Geometria*.
- Pokaż *Pole Wprowadzania* (menu *Widok*).
- W menu *Opcje* ustaw Etykietowanie na *Wszystkie nowe obiekty*.





## Instrukcje

1		Utwórz poziomy suwak: nazwa <i>Kolumny</i> , liczby w przedziale od 1 do 10, <i>krok</i> 1, szerokość 300.
2		Utwórz nowy punkt <i>A</i>
3		Narysuj odcinek <i>a</i> z punktu <i>A</i> o danej długości <i>Kolumny</i> (utworzy się odcinek <i>AB</i> )
4		Przesuń punkt na suwaku, żeby sprawdzić czy wartość suwaka jest równa długości odcinka.
5		Narysuj prostą <i>b</i> prostopadłą do odcinka <i>a</i> i przechodzącą przez punkt <i>A</i>
6		Narysuj prostą <i>c</i> prostopadłą do odcinka <i>a</i> przez punkt <i>B</i> .
7		Utwórz pionowy suwak: nazwa <i>Rzędy</i> , liczby w przedziale od 1 do 10, <i>krok</i> 1, szerokość 300.
8		Narysuj okrąg <i>d</i> o środku <i>A</i> i danym promieniu <i>Rzędy</i>
9		Przesuń punkt na suwaku, żeby sprawdzić czy wartość suwaka jest równa długości odcinka.
10		Utwórz punkt <i>D</i> w jednym z miejsc przecięcia okręgu <i>d</i> z prostą <i>c</i> .
11		Narysuj prostą <i>e</i> równoległą do odcinka <i>a</i> i przechodzącą przez punkt <i>D</i>
12		Utwórz punkt <i>C</i> w miejscu przecięcia się prostych <i>c</i> i <i>e</i> .
13		Narysuj wielokąt <i>ABCD</i> .
14		Ukryj proste, okrąg <i>d</i> i odcinek <i>a</i> .
15		Ukryj nazwy odcinków
16		Ustaw oba suwaki <i>Kolumny</i> i <i>Rzędy</i> na wartość 10.
17		<p>Utwórz listę odcinków pionowych</p> $\text{Ciąg}[\text{Odcinek}[A+i(B-A)/Kolumny, D+i(C-D)/Kolumny], i, 1, Kolumny]$ <p><u>Uwagi:</u></p> <p><math>A+i(B-A)/Kolumny</math> definiuje ciąg punktów na odcinku <i>AB</i> w odstępach 1.</p> <p><math>D+i(C-D)/Kolumny</math> definiuje ciąg punktów na odcinku <i>DC</i> w odstępach 1.</p> <p><math>\text{Odcinek}[A+i(B-A)/Kolumny, D+i(C-D)/Kolumny]</math> tworzy listę odcinków między powyżej wymienionymi parami punktów. Zauważ, że końce tych odcinków nie są widoczne w <i>Widoku Grafiki</i>. Liczba odcinków jest równa liczbie wskazanej na suwaku <i>Kolumny</i>.</p>



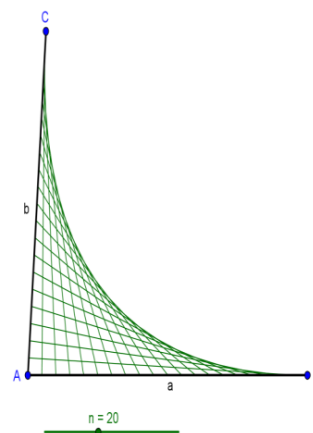
18		Utwórz listę odcinków poziomych $\text{Ciąg}[\text{Odcinek}[A+i(D-A)/\text{Rzędy}, B+i(C-B)/\text{Rzędy}], i, 1, \text{Rzędy}]$
19		Przesuń punkty suwaków <i>Kolumny</i> i <i>Rzędy</i> , żeby sprawdzić działanie konstrukcji.
20	ABC	Wprowadź statyczny i dynamiczny tekst pokazujący działanie mnożenia, w którym czynnikami są wartości liczbowe - suwaków <i>Kolumny</i> <i>tekst1</i> : <i>Kolumny</i> <i>tekst2</i> : * <i>tekst3</i> : <i>Rzędy</i> <i>tekst4</i> : =
21		Oblicz <i>wynik</i> mnożenia: $\text{wynik} = \text{Kolumny} * \text{Rzędy}$
22	ABC	Wprowadź tekst dynamiczny <i>tekst5</i> : <i>wynik</i>
23		Ukryj punkty <i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> , <i>D</i> .
24		Dopracuj szatę graficzną konstrukcji w oknie dialogowym <i>Właściwości</i> ( <i>Menu - Edycja - Właściwości</i> ).

## Zadanie dnia: kompozycja strunowa z krzywych Béziera

Krzywe Béziera są to krzywe zadane równaniem parametrycznym. Są one wykorzystywane w grafice komputerowej na przykład do tworzenia linii gładkich czcionek wektorowych.

### Przygotowania




- Otwórz nowe okno w GeoGebra.
- Przełącz Widoki na – Geometria.
- Ukryj *Widok Algebry* i *Osie* (menu *Widok*).
- W menu *Opcje* ustaw *Etykietowanie* na pozycję *Wszystkie Nowe Obiekty*.



### Instrukcje

1		Odcinek <i>a</i> o końcach <i>AB</i>
2		Odcinek <i>b</i> o końcach <i>AC</i>
3		Suwak: nazwa <i>n</i> , dla liczb z przedziału od 0 do 50, krok 1, szerokość 200.

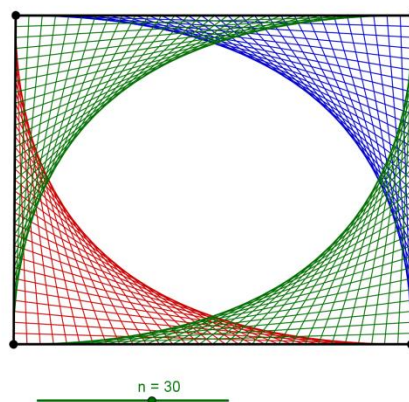


4	Utwórz $\text{Ciąg}[A + i/n (B - A), i, 1, n]$ <u>Podpowiedź:</u> Utworzony został ciąg $n$ punktów leżących na odcinku $AB$ w odstępach równych $n$ -tej części odcinka $a$ .
5	Utwórz $\text{Ciąg}[A + i/n (C - A), i, 1, n]$ <u>Podpowiedź:</u> Utworzony został ciąg $n$ punktów leżących na odcinku $AC$ w odstępach równych $n$ -tej części odcinka $b$ .
6	 Ukryj obie listy punktów.
7	Utwórz listę odcinków $\text{Ciąg}[\text{Odcinek}[\text{Element}[\text{list1}, i], \text{Element}[\text{list2}, n-i]], i, 1, n]$ <u>Podpowiedź:</u> Odcinki te łączą pierwszy punkt z listy 1 z przedostatnim punktem z listy 2, drugi punkt z listy 1 z drugim od końca punktem z listy 2, itd.
8	Wykonaj kosmetyczne zabiegi swojej konstrukcji w oknie dialogowym Własności.
9	 Poruszaj punktami $A, B, C$ żeby zmienić kształt twojej krzywej Béziera.
10	 Przesuń punkt suwaka $n$ , żeby zmienić liczbę odcinków tworzących krzywą Béziera.

Uwaga: Odcinki, które właśnie utworzyłeś są styczne do krzywych kwadratowych Béziera.

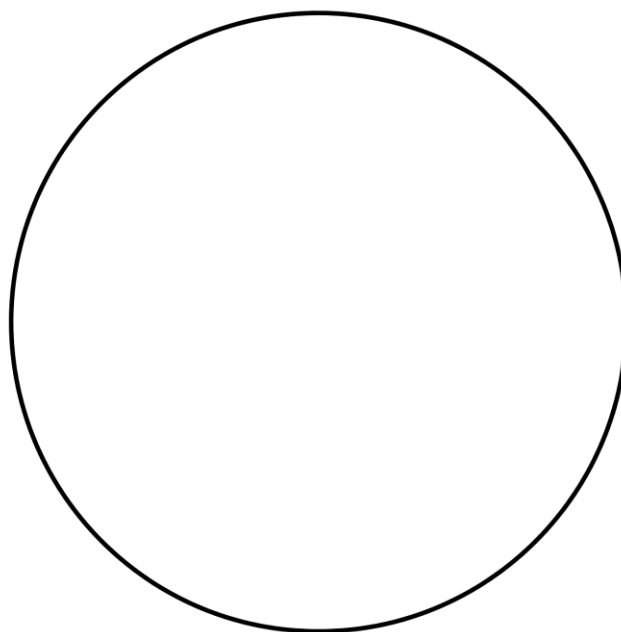
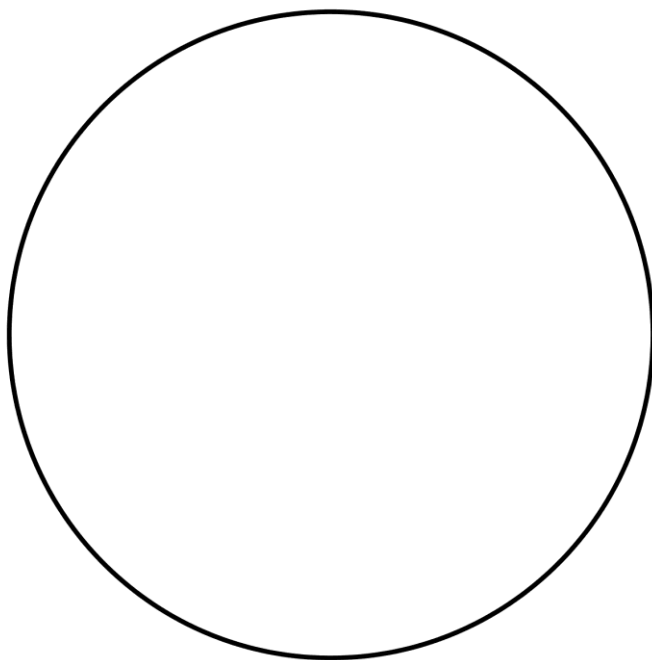
## Zadanie

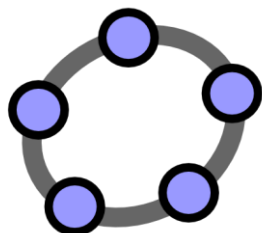
Utwórz w GeoGebraze inną 'kompozycję strunową', z wykorzystaniem ciągu punktów i odcinków.





## Arkusz do konstrukcji środka okręgu





# Widok Arkusza Kalkulacyjnego i Podstawowe Pojęcia Statystyczne

GeoGebra | Warsztaty | Część 9

## Spis Treści

9.1. <a href="#">WIDOK ARKUSZA W GEOGEBRZE - WPROWADZENIE</a> .....	120
9.2. <a href="#">ZAPISYWANIE PUNKTÓW W ARKUSZU KALKULACYJNYM</a> .....	121
9.3. <a href="#">KOPIOWANIE WZGLĘDNE I RÓWNANIA LINIOWE</a> .....	123
9.4. <a href="#">BADANIE ZALEŻNOŚCI LICZBOWYCH</a> .....	125
9.5. <a href="#">PUNKTY ROZRZUTU I LINIA TRENDU</a> .....	129
9.6. <a href="#">ZADANIE DNIA: BADANIE POLECEŃ STATYSTYCZNYCH</a> .....	131



## Widok Arkusza w GeoGebra - wprowadzenie

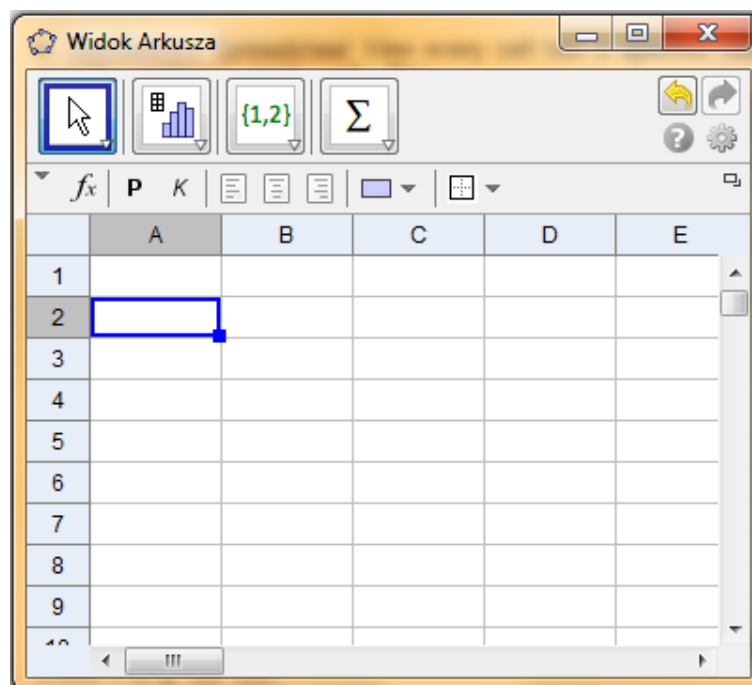
Widok Arkusza Kalkulacyjnego można wyświetlić wybierając w panelu *Widoki* opcję



*Tabela & Grafika* lub wybierając w menu *Widok* –



*Widok Arkusza*.




### Wstawianie wyrażeń do komórek tabeli

W *Arkuszu Kalkulacyjnym* GeoGebra każda komórka ma swoją nazwę odpowiadającą jej adresowi. Na przykład, komórka w kolumnie A i w rzędzie 1 ma nazwę A1.

Uwaga: Nazwy komórek mogą być używane w wyrażeniach i poleceniach w celu odwołania się do zawartości odpowiedniej komórki.

Do komórek arkusza możesz **wstawiać** nie tylko liczby, ale **wszystkie typy matematycznych obiektów**, które obsługuje GeoGebra (np. współrzędne punktów, funkcje, polecenia). GeoGebra natychmiast wyświetla w *Widoku Grafiki* graficzną reprezentację obiektu wprowadzonego do komórki arkusza. Nazwa obiektu odpowiada nazwie komórki, w której obiekt został utworzony. (np. A5, C1).

Uwaga: Domyślnie, obiekty arkusza należą do grupy obiektów pomocniczych w *widoku Algebry*. Obiekty pomocnicze można pokazywać lub ukrywać przez wybranie pozycji  'Obiekty Pomocnicze' w pasku narzędzi *Widok Algebr*

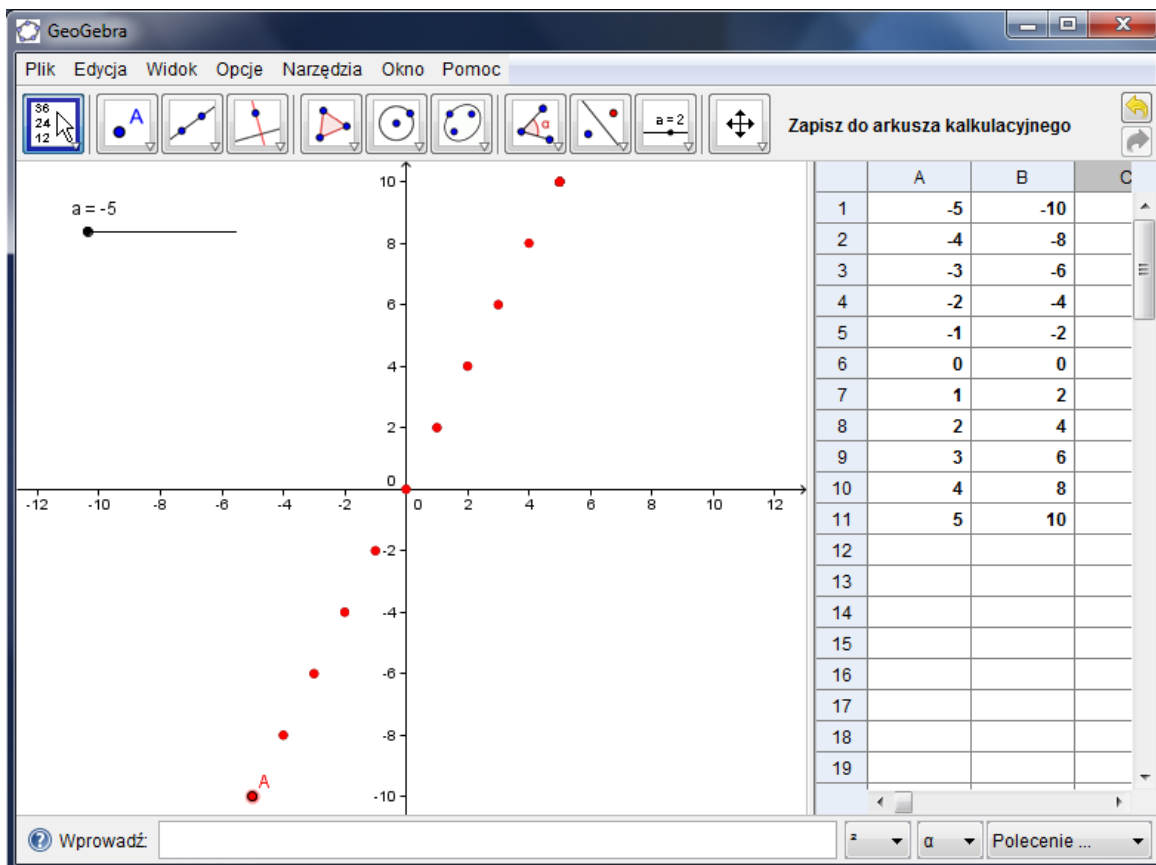




## Zapisywanie punktów w Arkuszu Kalkulacyjnym

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w *GeoGebra*.
- Przełącz *Widoki* na opcję *Tabela i Grafika*.
- Wyświetl *Pole Wprowadzania* (menu *Widok-Pole Wprowadzania*).



### Kroki konstrukcji

1		Utwórz suwak o $a$ domyślnym przedziale i kroku 1.
		<u>Podpowieź:</u> Wybierz narzędzie Suwak i kliknij myszką w dowolnym miejscu widoku Grafiki, żeby wskazać pozycję dla suwaka. W oknie dialogowym, które się pojawi, zmień <i>Krok</i> na 1 (domyślnie jest 0.1) i kliknij przycisk <i>Zastosuj</i> .
2	$A = (a, 2a)$	Utwórz punkt $A$ przez wprowadzenie $A = (a, 2a)$ w <i>Pasku Wprowadzania</i> .
		<u>Podpowieź:</u> Wartość suwaka $a$ określa współrzędną $x$ punktu $A$ , podczas gdy współrzędna $y$ jest wielokrotnością



		tej wartości.
3		Pokaż etykietę punktu <i>A</i> w <i>Widoku Grafiki</i> .
4		Zmieniaj wartość suwaka, żeby śledzić różne pozycje punktu <i>A</i> .
5		Użyj narzędzi <i>Przemieszczaj Obszar Roboczy</i> , <i>Powiększ</i> , <i>Pomniejsz</i> i ustaw <i>widok Grafiki</i> tak aby punkt <i>A</i> był widoczny.
6		Włącz ślad punktu <i>A</i> .  <u>Podpowiedź:</u> Kliknij prawy przycisk myszki (MacOS: <b>+Ctrl</b> ) na punkcie <i>A</i> i w menu kontekstowym dla punktu <i>A</i> zahacz pozycję 'Ślad włączony'.
7		Zmieniaj pozycję suwaka, żeby zobaczyć zmieniające się pozycje śladu punktu <i>A</i> .
8		Ustaw wartość suwaka na pozycję -5.
9		Zapisz współrzędne różnych pozycji punktu <i>A</i> do Arkusza kalkulacyjnego:  (1) Wybierz narzędzie <i>Zapisz do Arkusza Kalkulacyjnego</i> . Następnie kliknij lewym przyciskiem myszki na punkcie <i>A</i> , żeby go zaznaczyć. <u>Uwaga:</u> Współrzędne aktualnej pozycji punktu <i>A</i> są natychmiast wprowadzone o komórki <i>A1</i> (współrzędna - <i>x</i> ) i <i>B1</i> (współrzędna <i>y</i> ) arkusza. (2) Zmieniaj teraz wartości suwaka <i>a</i> , żeby zapisać w arkuszu współrzędne wszystkich możliwych pozycji punktu <i>A</i> . <u>Uwaga:</u> Nie przełączaj się w tym czasie na inne narzędzia.

## Zadania dodatkowe

### Zadanie 1: Badanie według jakiego wzoru zmieniają się wartości w kolumnie B.

Konstrukcja przedstawiona powyżej może posłużyć do różnego rodzaju zadań. Uczniowie mogą na podstawie danych w arkuszu próbować odgadnąć według jakiego wzoru zmieniają się liczby w kolumnie *B* w zależności od liczb w kolumnie *A*. Można też przedstawić uczniom punkty na wykresie aby odgadli wzór funkcji, której wykres zawiera dane punkty. Uczniowie mogą sprawdzić



swoje przewidywania wpisując zaproponowany przez siebie wzór w *Pole Wprowadzania* (np. wprowadzenie  $f(x) = 2x$  pokaże prostą przechodzącą przez wszystkie punkty).

## Zadanie 2: Tworzenie nowego zadania


Zmień współrzędną  $y$  punktu  $A$  aby utworzyć zaproponować zadanie:

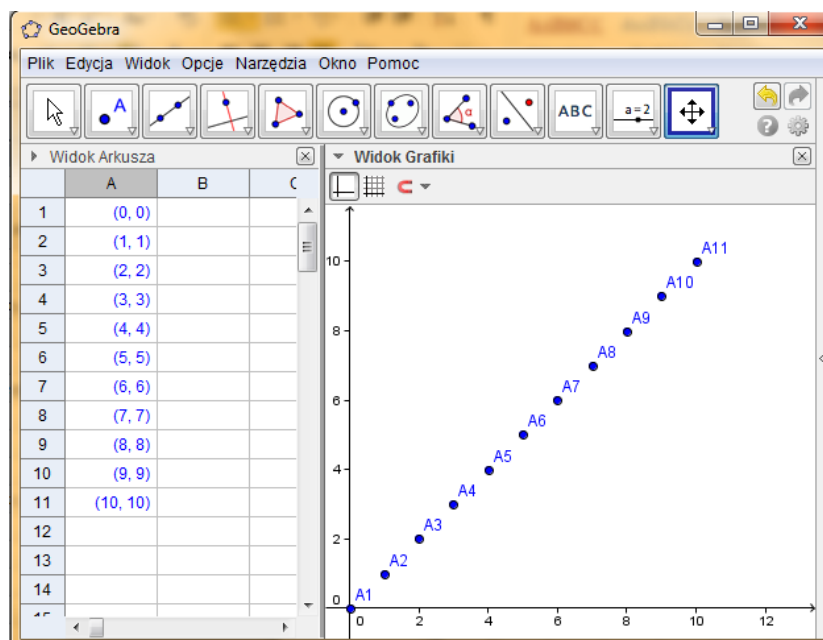
- Uaktywnij narzędzie Przesuń i kliknij dwukrotnie na punkt  $A$ , żeby otworzyć okno dialogowe *Przededefiniuj*. W miejscu drugiej współrzędnej punktu  $A$  wpisz inny wzór, np.  $a^2$ .
- Wykorzystaj *pasek stylu Widoku Grafiki* i zmień kolor lub rozmiar punktu  $A$ .
- Powtórz kroki od 7 to 9 powyższych instrukcji aby zapisać współrzędne punktu  $A$  w nowych zmiennych.

Uwaga: Jeśli nie usuniesz starych wartości w kolumnach  $A$  i  $B$ , to GeoGebra automatycznie użyje następnych dwóch pustych kolumn (np.  $C$  i  $D$ ) do zapisanych nowych wartości współrzędnych  $x$  i współrzędnych  $y$ .

## Kopiowanie względne i równania liniowe





### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w *GeoGebra*.
- Przełącz *Widoki* na opcję  *Tabela i Grafika*.
- Wyświetl *Pole Wprowadzania* (menu *Widok-Pole Wprowadzania*).





## Kroki konstrukcji

1		Uaktywnij narzędzie <i>Przemieszczaj Obszar Roboczy</i> i przeciągnij początek układu współrzędnych blisko lewego dolnego rogu w <i>Widoku Grafiki</i> .
2	$(0, 0)$	W <i>Widoku Arkusza</i> , kliknij komórkę A1 i wprowadź współrzędne punktu $(0, 0)$ .
3	$(1, 1)$	W <i>Widoku Arkusza</i> , kliknij komórkę A2 i wprowadź współrzędne punktu $(1, 1)$ .
4	<b>A A</b>	Pokaż etykiety obu punktów w <i>Widoku Grafiki</i> .
5		Wykonaj <b>kopiowanie względne</b> wprowadzonych punktów do innych komórek kolumny A: (1) Podświetl myszką komórki A1 i A2. (2) Kliknij na mały kwadracik w prawym dolnym rogu podświetlonego zakresu komórek.. (3) Przytrzymaj lewy przycisk myszki i przeciągnij wskaźnik w dół aż do komórki A11.
6	  	Użyj narzędzi <i>Przemieszczaj Obszar Roboczy</i> , <i>Powiększ</i> , <i>Pomniejsz</i> i ustaw <i>widok Grafiki</i> tak aby wszystkie punkty były widoczne.

## Zadania dodatkowe

### Zadanie 1: Zbadaj współrzędne ciągu punktów.

Jaki ciąg liczb tworzy się przez stosowanie “względnego kopiowania” w sposób opisany powyżej?

Podpowiedź: Zbadaj współrzędne  $x$  wszystkich utworzonych punktów i postaw hipotezę na temat ich wzajemnej zależności. Zrób to samo dla współrzędnych  $y$  tychże punktów.

### Zadanie: Dopasuj równanie

Postaraj się przewidzieć wzór funkcji, której wykres przechodzi przez wszystkie punkty utworzonego ciągu. Wprowadź wzór do *Pola Wprowadzania*, żeby sprawdzić trafność przewidywań.

### Zadanie 3: Utwórz nowe zadanie

Zmień współrzędne punktów wyjściowych aby utworzyć ciąg punktów, do zbadania w nowym zadaniu dla uczniów.




Wersja 1: Zmień wyjściowe punkty w *Widoku Arkusza*.

Kliknij dwukrotnie w komórkę A2 i zmień współrzędne punktu na (1, 2). Po wciśnięciu klawisza Enter, wszystkie punkty, które zależą od punktu A2 dopasują się automatycznie do zmiany, zarówno w *Widoku Arkusza* jak i w *Widoku Grafiki*.

Wersja 2: Zmień wyjściowe punkty w *Widoku Grafiki*.

Uaktywnij narzędzie *Przesuń* i przeciągnij punkt A2 do innej pozycji w układzie współrzędnych. Natychmiast, wszystkie punkty zależne dopasowują się do zmian zarówno w widoku Grafiki jak i w Widoku Arkusza.

Uwaga: Aby ograniczyć współrzędne punktów do liczb całkowitych wykorzystaj *Pasek Stylu Widoku Grafiki* i ustal styl punktu *Przymocuj do punktów kratowych*. Wyświetl *Siatkę* klikając na ikonę  *Paska Stylu Widoku Grafiki*.

Wskazówka: Zmieniając położenie punktu A1 możesz utworzyć zadania odnoszące się do funkcji liniowych postaci  $y = m \cdot x + b$  o wykresach niekoniecznie przechodzących przez początek układu współrzędnych.

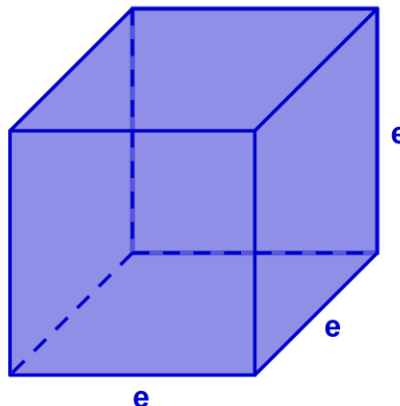
## Badanie zależności liczbowych

Zbadamy jak zmienia się powierzchnia sześcianu w zależności od długości jego krawędzi.

### Przygotowania z kartką i ołówkiem

Policz powierzchnię sześcianu przy danej długości  $e$  jego krawędzi. Wybierz przynajmniej dwie wartości długości krawędzi z każdej tabeli ale nie wybieraj tych samych liczb co twój sąsiad.

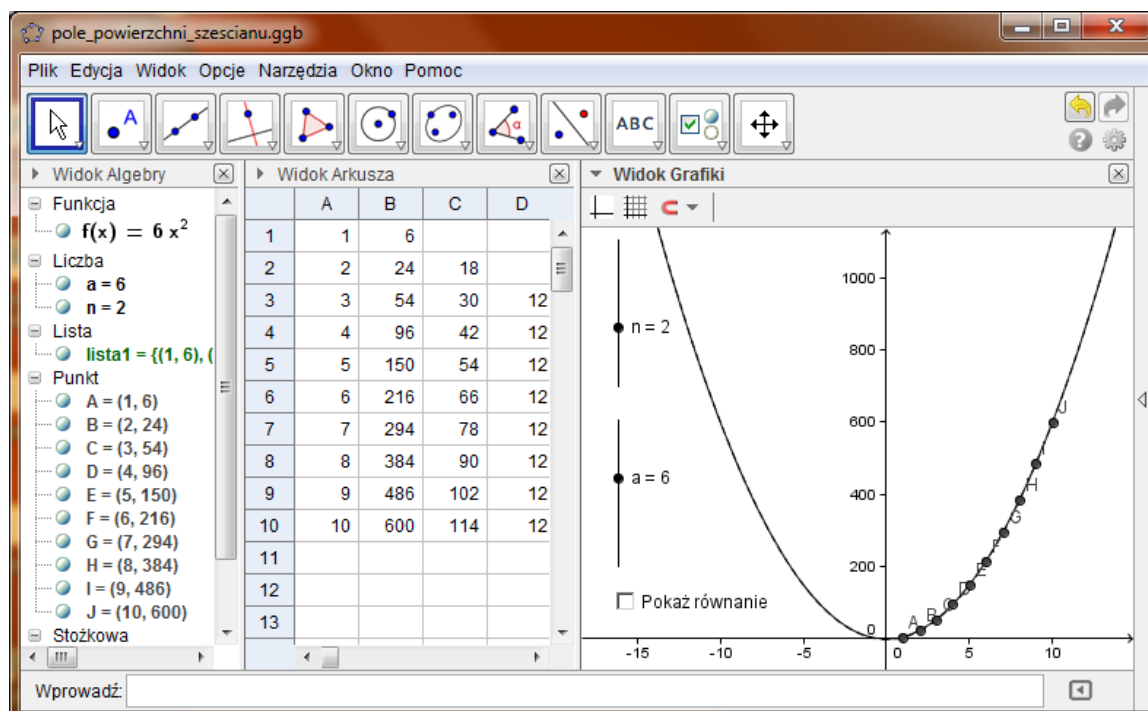
Długość krawędzi sześcianu	Pole powierzchni sześcianu
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	





## Przygotowania w GeoGebra

- Otwórz nowe okno w *GeoGebra*.
- Przełącz *Widoki* na opcję *Tabela i Grafika*.
- Wyświetl *Pole Wprowadzania* (menu *Widok-Pole Wprowadzania*).
- W menu *Opcje* wybierz pozycję *Etykietowanie* i zaznacz *Tylko Nowe Punkty*.




## Kroki konstrukcji

### Utwórz listę punktów

1	Wprowadź następujące liczby do komórek kolumny A: A1: 1      A2: 2
	Zaznacz komórki A1 i A2. Wykonaj kopiowanie względne wartości aż do komórki A10 aby utworzyć ciąg różnych wartości długości krawędzi.  <u>Podpowiedź:</u> W ten sposób utworzysz liczby od 1 do 10.
3	W komórce B1 wpisz wzór na pole powierzchni w odniesieniu do długości krawędzi zawartej w komórce A1.  <u>Podpowiedź:</u> W komórce B1 wpisujemy najpierw znak równości a następnie wzór, w którym zmienną jest nazwa komórki A1. Aby wstawić nazwę komórki A1 wystarczy kliknąć na tę komórkę. (=6A1^2)



4	<p>Zaznacz komórkę <math>B1</math> i wykonaj kopiowanie względne aż do komórki <math>B10</math>.</p> <p><u>Wskazówka:</u> W tym celu wystarczy kliknąć dwukrotnie na komórkę <math>B1</math>.</p>
5	<p>Utwórz wykres Punktów z tych danych.</p> <p>(1) Myszka podświetl wszystkie komórki z liczbami w kolumnach <math>A</math> i <math>B</math>.</p> <p>(2) Kliknij prawy przycisk myszki (MacOS: <math>+Ctrl</math>) na podświetlonych komórkach i z menu kontekstowego wybierz 'Utwórz listę punktów'.</p> <p><u>Uwaga:</u> Wartości w kolumnie <math>A</math> oznaczają współrzędną <math>x</math> a wartości w kolumnie <math>B</math> określają współrzędne <math>y</math> rysowanych punktów.</p> <p><u>Wskazówka:</u> Punkty utworzone z danych wyświetlane są w <i>Widoku Algebry</i> w postaci listy punktów. Domyślnie <i>GeoGebra</i> nazywa tę listę <math>L_1</math>.</p>
6	<p> Użyj narzędzia <i>Przemieszczaj Obszar Roboczy</i> i zmień skalę na osi <math>y</math> tak by wszystkie punkty były widoczne w <i>Widoku Grafiki</i>.</p> <p><u>Wskazówka:</u> Wybierz narzędzie <i>Przemieszczaj Obszar Roboczy</i>, kliknij myszką na oś <math>y</math> i przeciągaj myszkę ją aż ujrzysz etykietę 600.</p>

### Zbadaj zależność liczbową w kolumnie $B$ .

7	<p>W komórce <math>C2</math>, wprowadź formułę <math>=B2-B1</math>, żeby policzyć różnice między dwiema kolejnymi wartościami pól powierzchni.</p> <p><u>Podpowiedź:</u> Po wpisaniu znaku równości kliknij na komórkę <math>B2</math>, żeby wprowadzić jej nazwę do aktywnej komórki <math>C2</math>, wpisz znak odejmowania i zaznacz komórkę <math>B1</math>. Zatwierdź formułę klawiszem Enter.</p>
8	Zaznacz komórkę $C2$ i skopiuj formułę aż do komórki $C10$ .
9	W komórce $D3$ , wprowadź formułę $=C3-C2$ aby policzyć różnicę między kolejnymi różnicami
10	Zaznacz komórkę $D3$ i skopiuj formułę aż do komórki $D10$ .

### Zadanie 1

Zbadaj ciągi liczbowe w kolumnach  $C$  i  $D$ . Spróbuj odgadnąć funkcję wielomianową, której wykres przebiega przez wszystkie punkty w *Widoku Grafiki* i pozwala policzyć powierzchnię sześcianu dla dowolnej długości krawędzi  $e$ .

- Czy można określić stopień tego wielomianu przez zbadanie ciągów różnic wygenerowanych w kolumnach  $C$  i  $D$ ?



- Wyjaśnij sąsiadowi z ławki dlaczego powtarzamy badanie różnic obliczanych wartości i co one oznaczają.
- Czy możliwe jest określenie współczynnika wielomianu przez badanie ciągów różnic wygenerowanych w kolumnach  $C$  i  $D$ ?
- Czy byłoby tak samo gdyby ciąg wartości w kolumnie  $A$  nie był ciągiem kolejnych liczb całkowitych? (np., 1, 3, 5,...)? Uzasadnij swoją odpowiedź.

### Sprawdź swoje przewidywania na temat wielomianu.

1		Utwórz suwak $n$ w przedziale od 0 do 5, z krokiem 1. W zakładce Suwak zmień opcję położenia 'Poziomy' na opcję Pionowy'.
1		Utwórz suwak $a$ w przedziale od 0 do 10, z krokiem 1. Zmień ustawienie z opcji Poziomy' na opcję Pionowy'.
1		Wprowadź wielomian $f(x) = a * x^n$ aby utworzyć wielomian stopnia $n$ o współczynniku $a$ .
3		<u>Uwaga:</u> Wartości stopnia $n$ i współczynnika $a$ można zmienić na suwakach.
1		Zmieniaj wartości suwaków $a$ i $n$ aby dopasować wzór do swoich przewidywań Czy wykres wielomianu przechodzi przez wszystkie punkty pokazane w Widoku Grafiki?
4		

### Wzbogać konstrukcję

15	ABC	Wprowadź wzór wielomianu jako tekst dynamiczny w Widoku Grafiki.  <u>Wskazówka:</u> Wybierz narzędzie <i>Wstaw Tekst</i> i kliknij myszką w widoku Grafiki, żeby otworzyć okno dialogowe. (1) Wprowadź $f(x) =$ w oknie dialogowym. (2) Kliknij na wykres, żeby wprowadzić jego nazwę to edytowanego tekstu. <u>Uwaga:</u> GeoGebra wprowadzi automatycznie syntaktykę wymaganą w tekście dynamicznym. (3) Kliknij przycisk OK.
16		Wstaw <i>Pole wyboru</i> , które pozwala pokazywać/ukrywać wzór funkcji wielomianowej.  <u>Wskazówka</u> Wybierz narzędzie <i>Pole wyboru Pokaż/Ukryj obiekt</i> i kliknij w Widoku Grafiki, żeby otworzyć okno dialogowe. (1) Wprowadź Podpis Pokaż równanie. (2) Kliknij na strzałkę, żeby otworzyć listę dostępnych obiektów. (3) Wybierz z listy obiekt <i>Tekst1</i> i kliknij przycisk 'Zastosuj'.
17		Aktywuj narzędzie 'Przesuń' i sprawdź czy pole wyboru właściwie kontroluje widoczność tekstu.





18




Otwórz okno dialogowe 'Właściwości' (menu-*Edycja-Właściwości*) i wzbogać układ obiektów w Widoku Grafiki (np. zmień kolor wykresu wielomianu i punktów, dopasuj kolor tekstu do koloru wykresu wielomianu, popraw pozycję suwaka, pola wyboru i tekstu w *Widoku Grafiki*).

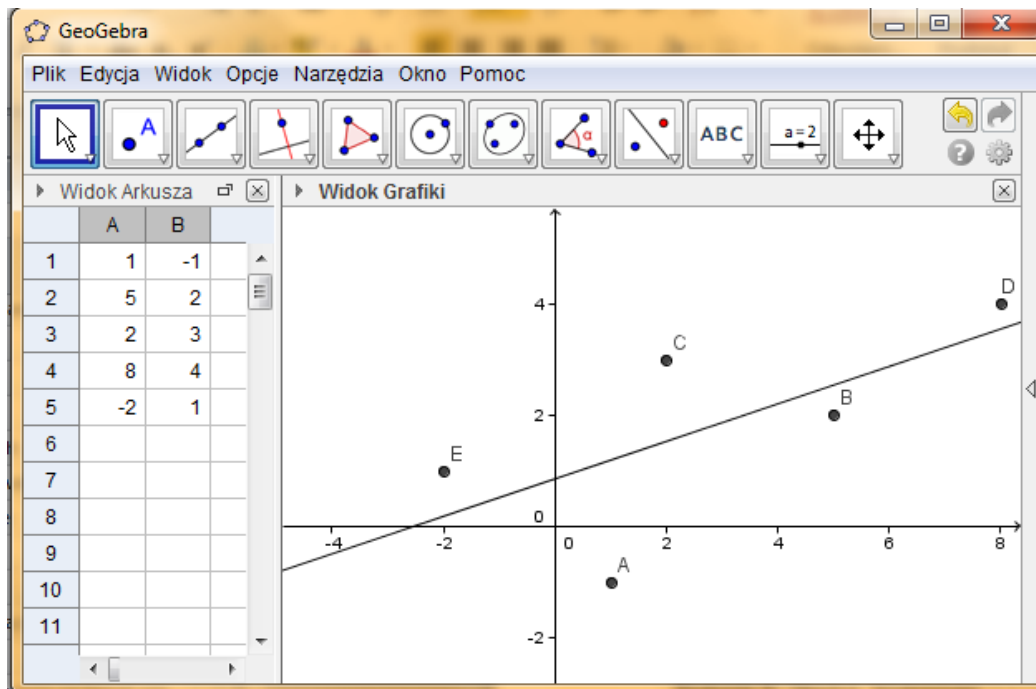
## Zadanie 2

- Sprawdź czy pomysł badania ciągów różnic dwóch kolejnych wartości funkcji działa dla wszystkich wielomianów  $f(x) = a x^n$ .  
Wskazówka: Możesz wprowadzić wzór do komórki B1 i wykonać kopiowanie względne w dół aż do komórki B10 aby utworzyć listę wartości funkcji. Pamiętaj, że na początku należy wpisać znak równości (np.  $= x^2$ )
- Jakie modyfikacje w *Widoku Arkusza* i *Widoku Grafiki* są konieczne, żeby można było łatwo wyznaczyć współczynniki  $a$  i  $n$  we wzorze funkcji wielomianowej  $f(x) = a x^n + b$ ?

## Punkty rozrzutu i linia trendu

### Przygotowania

- Otwórz nowe okno w *GeoGebra*ze.
- Przełącz *Widoki* na opcję  *Tabela i Grafika*.
- Wyświetl *Pole Wprowadzania* (menu *Widok-Pole Wprowadzania*).
- W menu *Opcje* wybierz pozycję *Etykietowanie* i zaznacz *Tylko Nowe Punkty*.



## Nowe narzędzie





**Linia trendu Nowe!**

## Kroki konstrukcji


1	Wprowadź w arkuszu następujące liczby do komórek kolumny A: A1: 1    A2: 5    A3: 2    A4: 8    A5: -2
2	Wprowadź następujące liczby do komórek kolumny B: B1: -1    B2: 2    B3: 3    B4: 4    B5: 1
3	<p>Otwórz wykres rozrzutu tych danych.:</p> <ol style="list-style-type: none"> <li>(1) Myszka podświetl wszystkie komórki zawierające liczby w kolumnach A i B.</li> <li>(2) Kliknij prawy przycisk myszki (MacOS: +Ctrl) na podświetlonych komórkach i wybierz w menu kontekstowym polecenie 'Utwórz listę punktów'.</li> </ol> <p><u>Uwaga:</u> Wartości w kolumnie A oznaczają współrzędną <math>x</math> a wartości w kolumnie B określają współrzędne <math>y</math> rysowanych punktów.</p>



4 	<p>Użyj narzędzia ‘Linia trendu’ aby utworzyć linię najlepszego dopasowania.</p> <p><u>Podpowiedź:</u> Uaktywnij <i>Widok Grafiki</i> i wybierz narzędzie ‘Linia trendu’. Zaznacz prostokąt z danymi punktami: kliknij myszką w okolicy lewego górnego rogu <i>Widoku Grafiki</i> i przy wciśniętym lewym przycisku myszki przeciągnij wskaźnik do prawego dolnego rogu.</p>
5	<p>Zmień kolor i grubość linii korzystając z <i>Paska Stylu Widoku Grafiki</i>.</p>
6 	<p>Korzystając z tej konstrukcji możesz łatwo zademonstrować jak punkty skrajne wpływają na linię najlepszego dopasowania.</p> <p>Zmieniaj myszką położenie punktów i obserwuj jak te modyfikacje wpływają na linię trendu.</p> <p><u>Uwaga:</u> Możesz także łatwo zmienić wyjściowe dane w <i>Widoku Arkusza</i>.</p>

## Importowanie danych z innych arkuszy kalkulacyjnych

Uwaga: GeoGebra pozwala na kopiowanie i wklejanie danych z innych programów arkuszy kalkulacyjnych do arkusza *GeoGebry*:

- Zaznacz i skopiuj dane, które chcesz importować (np. użyj skrótu klawiszowego *Ctrl+C* (*MacOS: Cmd-C*) do kopiowania danych do schowka pamięci).
- Otwórz okno *GeoGebry* i wyświetl *Widok Arkusza*.
- Kliknij w komórkę, w której chcesz umieścić pierwszą wartość danych.
- Wklej dane ze schowka komputera do *Widoku Arkusza GeoGebry*. W tym celu możesz także użyć klawiszy skrótu *Ctrl-V* lub kliknąć prawym przyciskiem myszki (*MacOS: Ctrl+klik*) na podświetlonej komórce i z menu kontekstowego. wybrać polecenie ‘Wklej’ .

## Zadanie dnia: Badanie Poleceń Statystycznych

Wczoraj, 25 twoich uczniów pisało quiz sprawdzający ich wiedzę po pierwszym semestrze. Po zakończeniu pisania prosisz uczniów aby ocenili stopień trudności quizu w skali od 1 (bardzo łatwy) do 5 (bardzo trudny) .

- 4 uczniów oceniło quiz na ‘bardzo łatwy’ (1)
- 6 uczniów oceniło quiz jako ‘łatwy’ (2)
- 6 innych uczniów oceniło quiz jako ‘trudny’ (4)
- 1 uczeń ocenił quiz jako ‘bardzo trudny’ (5)
- Reszta uczniów uznała, że quiz był ‘ok’ (3).



## Zadanie 1: Utwórz histogram

Wprowadź dane do *Arkusza GeoGebry* i utwórz histogram obrazujący podany zestaw danych.

Wskazówki:

- Jeśli nie wiesz jak uzupełniać polecenie *Histogram*, wprowadź to polecenie w *Polu Wprowadzania* i wciśnij klawisz *F1*.

Wskazówki:

- W poleceniu  
Histogram[<Lista Granic Klas>, <Lista Wysokości>]  
o *Lista Granic Klas* określa położenia i szerokości słupków histogramu.  
o *Lista Wysokości* określa **częstości bezwzględne** liczby uczniów, którzy oceniali dany stopień trudności quizu.
- Wybierz *Granice Klas* tak, aby ocena stopnia trudności testu była wyświetlana w środku każdego słupka histogramu.
- Przed zastosowaniem polecenia *Histogram* trzeba utworzyć listę danych w każdej kolumnie w *Widoku Arkusza*.  
Uwaga: Podświetl wszystkie liczby w jednej kolumnie i kliknij prawy przycisk myszki (MacOS: +Ctrl) na jednej z podświetlonych komórek. W menu kontekstowym wybierz polecenie '*Utwórz Listę*'

## Zadanie 2: Wyznacz średnią, medianę i modę

1. Spróbuj przewidzieć średnią, medianę i modę zebranych danych częstości bezwzględnych liczby uczniów.

Wskazówka: Możesz uporządkować listę częstości danych wykorzystując polecenie *Porządkuj*.

2. Sprawdź swoje przewidywania odnośnie średniej, mediany i mody.

